

数学

1. (1) $1 \leq n \leq 4$ (※ $n = 1, 2, 3, 4$ に限定する表記であれば正解とする)

(2) $a < \frac{25}{4}, a > \frac{25}{4}$ (3) $2a f(a) - a^2 f'(a)$

(4) $-\frac{1}{2}$ (5) $a = -3, b = 20$

2.

(1) 曲線 $y = \log x$ 上の点 $(t, \log t)$ ($t > 0$) における接線 $y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$ が点 (a, b) を通過するので

$$b = \frac{1}{t}a - 1 + \log t$$

ここで $f(t) = \frac{a}{t} - 1 + \log t$ とおくと $f'(t) = -\frac{a}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{t-a}{t^2}$

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = +\infty$$

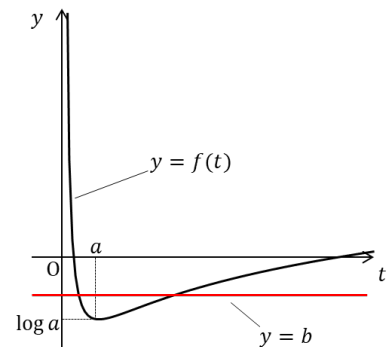
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$$

増減表は以下の通り

t	0	a	∞
$f'(t)$	\times	-	0	+	
$f(t)$	\times	\searrow	$\log a$	\nearrow	∞

$a > 0, b > 0$ のとき, $y = f(t)$ と $y = b$ が 2 点で交わるためには

$b > \log a$



(2) (1) より点 (a, b) を通過する接線は

$$b = \frac{1}{t}a - 1 + \log t$$

ここで $f(x) = \frac{a}{x} - 1 + \log x$ とおくと点 (a, b) は第二象限にあるから、

$a < 0, x > 0$ であり $f'(x) = \frac{x-a}{x^2} > 0$ である。

そのため $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加関数であるから $y = b$ との交点は高々 1 点となる。したがって接線が 2 本存在することはない。

3.

(1) 直角を挟む二つの辺の長さが x, y であるから斜辺の長さは $\sqrt{x^2 + y^2}$ である。

3 辺の長さの和は 4 であるから、 $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 4$

$$x^2 + y^2 = (4 - x - y)^2 = 16 - 8x - 8y + x^2 + 2xy + y^2$$

したがって $0 = 16 - 8x - 8y + 2xy$

$$\therefore y = \frac{4(x-2)}{x-4} \quad (0 < x < 2, 0 < y < 2)$$

$$(2) S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{4(x-2)}{x-4} = \frac{2(x^2 - 2x)}{x-4}$$

$$\frac{dS}{dx} = 2 \cdot \frac{(2x-2)(x-4) - (x^2 - 2x) \cdot 1}{(x-4)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - 8x + 8}{(x-4)^2}$$

$$(3) \frac{dS}{dx} = 0 \text{ とおくと } x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\text{これより } x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

x	0	……	$4 - 2\sqrt{2}$	……	2
$\frac{dS}{dx}$	×	+	○	-	×
S	×	↗	$12 - 8\sqrt{2}$ 最大	↘	×

S は $x = 4 - 2\sqrt{2}$ で極大値 (最大値) となる。

$$S = \frac{2\left\{(4 - 2\sqrt{2})^2 - 2(4 - 2\sqrt{2})\right\}}{4 - 2\sqrt{2} - 4} = \frac{24 - 16\sqrt{2}}{2}$$

$$= 12 - 8\sqrt{2}$$

$$\text{このとき, } y = \frac{4(x-2)}{x-4} = \frac{4(4-2\sqrt{2}-2)}{4-2\sqrt{2}-4} = 4-2\sqrt{2}$$

斜辺の長さは $4-2(4-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-4$ である。

S の最大値 $12-8\sqrt{2}$, 3辺の長さ $4-2\sqrt{2}$, $4-2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}-4$

4.

$$z = \frac{1}{1+ui} + 2+i = \frac{1+(2+i)(1+ui)}{1+ui} = \frac{\{3-u+(2u+1)i\}(1-ui)}{(1+ui)(1-ui)}$$

$$= \frac{2u^2+3+(u^2-u+1)i}{1+u^2}$$

$$x = \frac{2u^2+3}{1+u^2} = 2 + \frac{1}{1+u^2} \quad \text{よつので} \quad x-2 = \frac{1}{1+u^2}$$

$$y = \frac{u^2-u+1}{1+u^2} = 1 - \frac{u}{1+u^2} \quad \text{よつので} \quad y-1 = -\frac{u}{1+u^2}$$

$$(x-2)^2 = \frac{1}{(1+u^2)^2}, \quad (y-1)^2 = \frac{u^2}{(1+u^2)^2}$$

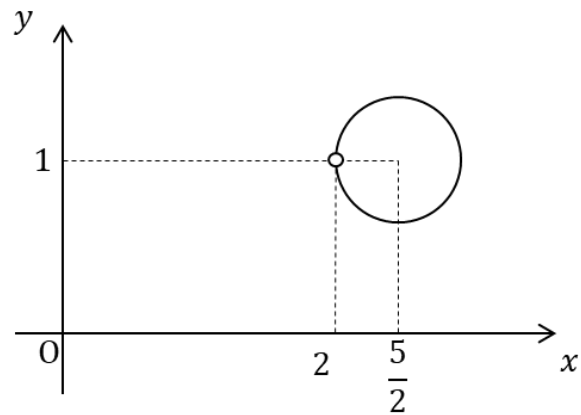
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{(1+u^2)^2} + \frac{u^2}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{1+u^2} = x-2$$

$$(x-2)^2 - (x-2) + (y-1)^2 = 0$$

$$\left\{ (x-2) - \frac{1}{2} \right\}^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\underline{\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2} \quad \text{この式は} \quad \left(\frac{5}{2}, 1 \right) \text{を中心とする半径} \frac{1}{2} \text{の円を表す。}$$

$x = 2 + \frac{1}{1+u^2} > 2$ であるから、上記の
 円周から点(2, 1)を除外した図形が点
 (x, y) の集合が描く軌跡である。



5.

(1) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$$

$t = \frac{\pi}{2} - x$ とおくと、 $dx = -dt$

x	$0 \rightarrow \pi/2$
t	$\pi/2 \rightarrow 0$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$$

よって、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ が成り立つ。

(2) $f(x) = e^x + x$ は区間 $[-1, 0]$ で連続であり、

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$$

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$$

より、 $f(-1) \neq f(0)$ であるから、中間値の定理より $-1 < x < 0$ の範囲に
 $f(x) = 0$ を満たす x が少なくとも 1 つ存在する。

したがって、方程式 $e^x + x = 0$ は、 $-1 < x < 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数
 解をもつ。

(3) 平均値の定理より, 任意の実数 a, b ($a < b$) について,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(p) \quad \text{かつ} \quad a < p < b$$

を満たす実数 p が存在する。

つねに $f'(x) = 0$ であるならば, つねに $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

したがって, 任意の実数 a, b ($a < b$) について $f(a) = f(b)$

よって任意の実数 x に対して $f(x)$ は定数であり,

この定数を c とすれば $f(x) = c$ である。