2022年度

公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　前期日程　問題

数　学

試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。

注意事項

1．受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄に記入すること。

2．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。

3．解答用紙の余白には，何も書いてはいけない。

4．問題冊子の余白は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。

5．問題の中の π は円周率を，e は自然対数の底をそれぞれ表す。

2022年度公立千歳科学技術大学一般選抜前期日程の補足説明について

「数学」

問題冊子　　４ページ　３．問題文の上から５行目の末尾に下線部を追加 …このとき以下の問いに答えなさい。<u>$\vec{a} \neq \vec{0}$ とする。</u>

1． 以下の問いに答えなさい。解答欄には答えのみ書きなさい。

(1) 実数 x, y が $2x^2+3y^2=1$ を満たすとき，x^2-3y の最大値と最小値を求めなさい。

(2) 直交座標 (x, y) の原点Oを極とし，x 軸 $(x \geqq 0)$ の半直線を偏角 θ の始線とする極座標 (r, θ) において，極方程式 $r^2=r(\sin\theta+4\cos\theta)-5+r^2\sin^2\theta$ で表される曲線を，直交座標 (x, y) における x と y の方程式として表しなさい。なお，θ の向きは反時計まわりを正の向きとする。

(3) x を正の実数とするとき，$y=\dfrac{x^2+x+36}{x}$ の最小値を求めなさい。

(4) $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt=xe^{-x}+c$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 c の値を求めなさい。

(5) $\log_2\{2(x-1)(x+2)\}<2$ を解きなさい。

(6) xy 平面上の曲線 $x^2+y^2-2x+ay=0$ (a は定数) 上の点 $\mathrm{A}(3, -3)$ における接線の方程式を求めなさい。

(7) 正の整数 N を5進法で表すと3桁の数 $\mathrm{abc}_{(5)}$ となり，7進法で表すと3桁の数 $\mathrm{cba}_{(7)}$ となる。このような整数 N をすべて求めて10進法で答えなさい。

(8) 座標平面上において，点 (a, b) から曲線 $y=e^x$ に異なる2本の接線が引けるための条件を，a と b を用いて表しなさい。

2． 以下の問いに答えなさい。

（1）次のように定められる数列を $\{a_n\}$ とする。

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right) a_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，任意の正の整数 n について，$a_n \leqq n \cdot 2^{n-1}$ が成り立つことを証明しなさい。

（2）任意の実数 x において，$f(x) > e^x$ を満たす関数を $f(x)$ とし，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + \int_n^{n+1} f(x)dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とするとき，任意の正の整数 n について $b_n > 2^n$ が成り立つことを証明しなさい。

3．原点をOとするxy平面上に点A$(\vec{a})$と点B$(\vec{b})$がある。$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+\vec{a})=0$を満たす点P$(\vec{p})$が描く図形を$C$とする。また，点Bを通り，方向ベクトルが$\vec{d}\ (\vec{d}\neq\vec{0})$である直線を$\ell$とする。$C$と$\ell$は交わらず，$C$上の点Eと$\ell$上の点Fは，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$の長さが最小になる点であるとする。なお，位置ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$の始点は原点Oであるものとする。このとき以下の問いに答えなさい。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$の長さを，ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{d}$の大きさ$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{d}|$およびそれらベクトルの内積を用いて表しなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

（2）三角形AEFの面積を，ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{d}$の大きさ$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{d}|$およびそれらベクトルの内積を用いて表しなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

（3）$\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(3,\ \sqrt{3})$，$\vec{d}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$であるとき，三角形AEFの面積を求めなさい。解答欄には答えのみ書きなさい。

4．　座標平面上における2つの曲線 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ と $C_2 : y = (2+\sqrt{3})x^2 - 2$ について，以下の問いに答えなさい。解答欄には，途中の計算過程も書きなさい。

（1） C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めなさい。

（2） 次の連立不等式が表す領域の面積を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 4 \\ y \geqq (2+\sqrt{3})x^2 - 2 \end{cases}$$