# 2022年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

## 一般選抜　前期日程　解答例

## 数学

注　下線の部分が解答

1.

（1）最大値　$\sqrt{3}$，　　最小値　$-\sqrt{3}$　　　（2）$y=x^2-4x+5$　　　（3）13

（4）$f(x)=(x-1)e^{-x}$，　　$c=-\dfrac{1}{e}$　　（5）$\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}<x<-2$，　$1<x<\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

（6）$y=2x-9$　　（7）51，　102　　（8）$0<b<e^a$

2.

（1）　$n=1$ のとき，$a_1=1$，$n\cdot 2^{n-1}=1\cdot 2^{1-1}=1$ なので，$a_n \leqq n\cdot 2^{n-1}$ は成り立つ。

$n=k$ のとき，$a_k \leqq k\cdot 2^{k-1}$ が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1}=2\left(1+\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\right)a_k \leqq 2\left(1+\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\cdot k\cdot 2^{k-1}$$
$$=\left(k+\sin\frac{k\pi}{2}\right)\cdot 2^k \leqq (k+1)\cdot 2^k \qquad \left(\because \quad \sin\frac{k\pi}{2} \leqq 1\right)$$

であるから，$n=k+1$ のときにも $a_n \leqq n\cdot 2^{n-1}$ が成り立つ。

以上から，数学的帰納法により任意の正の整数 $n$ について $a_n \leqq n\cdot 2^{n-1}$ が成り立つ。

（2）　$b_{n+1}-b_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx=3+\int_1^n f(x)dx$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

$$\begin{aligned}
b_n-2^n &=3+\int_1^n f(x)dx-2^n \\
&\geqq 3+\int_1^n e^x dx-2^n=3+\left[e^x\right]_1^n-2^n \\
&=3+e^n-e-2^n=e^n-2^n+3-e \\
&>0
\end{aligned}$$

以上から，任意の正の整数 $n$ について $b_n>2^n$ が成り立つ

3.

（1）点 F は，原点 O から$\ell$に下ろした垂線と$\ell$の交点で，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{b}+t\vec{d} \qquad (t\text{ は実数})$$

とおくことができ，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\vec{d}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\vec{d}=\left(\vec{b}+t\vec{d}\right)\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}+t\left|\vec{d}\right|^2=0 \qquad \therefore\ t=-\frac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|^2=\left|\vec{b}+t\vec{d}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+2t\vec{b}\cdot\vec{d}+t^2\left|\vec{d}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\frac{\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)^2}{\left|\vec{d}\right|^2}+\frac{\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)^2}{\left|\vec{d}\right|^2}$$

$$=\frac{1}{\left|\vec{d}\right|^2}\left\{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{d}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)^2\right\}$$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|-\left|\vec{a}\right|=\underline{\dfrac{1}{\left|\vec{d}\right|}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{d}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)^2}-\left|\vec{a}\right|}$

（2）点 A から$\ell$に下ろした垂線と$\ell$の交点を点 H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{b}+s\vec{d} \qquad (s\text{ は実数}) \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{b}-\vec{a}+s\vec{d}$$

とおくことができ，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\ell$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{d}$ より，

$$\left(\vec{b}-\vec{a}+s\vec{d}\right)\cdot\vec{d}=0 \qquad \therefore\ s=\frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}$$

ここで、

$$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{b}+s\vec{d}-\left(\vec{b}+t\vec{d}\right)=\left(s-t\right)\vec{d}=\left\{\frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}-\left(-\frac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}\right)\right\}\vec{d}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}\vec{d}$$

EF を底辺としたときの三角形 AEF の高さは，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{FH}}\right|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}\vec{d}\right|=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{d}\right|}{\left|\vec{d}\right|}$$

であるから，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{FH}}\right|=\underline{\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{d}\right|}{2\left|\vec{d}\right|^2}\left\{\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{d}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)^2}-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{d}\right|\right\}}$$

（3）$\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

4.

（1） $x^2+y^2=4$ ……①　　　$y=\left(2+\sqrt{3}\right)x^2-2$ ……②　から$x^2$を消去すると

$$\left(2+\sqrt{3}\right)y^2+y-6-4\sqrt{3}=0$$

となり，左辺を因数分解すると

$$(y+2)\left(y-\sqrt{3}\right)=0$$

となるので，$y=-2,\ \sqrt{3}$を得る。式①に代入して$x=0,\ \pm1$を得るので，$C_1$と$C_2$の共有点の座標は，$\underline{(0,\ -2),\ \left(-1,\ \sqrt{3}\right),\ \left(1,\ \sqrt{3}\right)}$となる。

（2） $\mathrm{A}\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(1,\ \sqrt{3}\right)$とすると，求める面積は

$$\text{扇形OAB}-\triangle\text{OAB}+\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{3}-\left(\left(2+\sqrt{3}\right)x^2-2\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}+2\left(2+\sqrt{3}\right)\int_0^1\left(1-x^2\right)dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}+2\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{3}=\underline{\frac{2\pi+8+\sqrt{3}}{3}}$$