2022年度

公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　公立大学中期日程　問題

数　学

試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。

注意事項

1．受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄に記入すること。
2．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。
3．解答用紙の余白には，何も書いてはいけない。
4．問題冊子の余白は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。
5．問題の中の π は円周率を，e は自然対数の底をそれぞれ表す。

1. 以下の問いに答えなさい。解答欄には答えのみ書きなさい。

（1）m を正の整数とするとき，$\dfrac{54!}{3^m}$ が正の整数となるような最大の m の値を求めなさい。

（2）直交座標 (x, y) の原点Oを極とし，x 軸 $(x \geqq 0)$ の半直線を偏角 θ の始線とする極座標 (r, θ) において，極方程式 $r = 4\cos\theta$ で表される曲線を，直交座標 (x, y) における x と y の方程式として表しなさい。なお，θ の向きは反時計回りを正の向きとする。

（3）x 軸上を動く点Pが，はじめに原点 $x = 0$ にある。いま，1枚の硬貨を投げて表が出たときには，点Pを正の方向に1だけ移動させ，裏が出たときには，負の方向に2だけ移動させるものとする。硬貨を続けて6回投げたとき，点Pが $x > 0$ にある確率を求めなさい。なお，使用した硬貨は表と裏が出る確率は等しいものとする。

（4）$2^{2x+1} + 2^{x+2} + 2^x - 3 \leqq 0$ を解きなさい。

（5）原点をOとする xy 平面内において，曲線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 上を動く点Pと，x 軸上の正の部分を動く点Qは，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$ を満たす。また，y 軸上を動く点Rは $\mathrm{OP} \perp \mathrm{QR}$ を満たす。いま，点Pが第1象限にあって原点Oに限りなく近づくと，点Rは $\left(0, \dfrac{a-1}{2}\right)$ に近づく。このとき，a の値を求めなさい。

（6）$Z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i\right)^{n-1}$（$n$ は正の整数）において，$|Z_n| < \dfrac{1}{50000}$ を満たす最小の n における Z_n の偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で求めなさい。なお，$i = \sqrt{-1}$ である。

（7）無限級数 $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \dfrac{4}{5!} + \dfrac{5}{6!} + \dfrac{6}{7!} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} + \cdots\cdots$ の値を求めなさい。なお，無限級数 $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{6!} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n!} + \cdots\cdots$ は自然対数の底 e に収束することを用いてよい。

（8）4つの関数 ① $f(x) = x^2$　② $f(x) = 1 - x$　③ $f(x) = e^x$　④ $f(x) = \sin 2\pi x$ を考える。それぞれの関数と正の整数 n について，2つの数列を $a_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ とするとき，任意の n について $a_n < b_n$ を満たす関数をすべて選びなさい。解答欄には①～④の番号で答えなさい。

2． $f(x)=\int_{1}^{2} t\,|t-x|\,dt$ の最小値を求めなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

3． 以下の条件 A，B，C，D は，整数 m と n に関する条件である。

条件 A　$\sin\dfrac{m\pi}{2} = \cos\dfrac{n\pi}{2}$

条件 B　$|n^2 - (m-1)^2|$ が 4 の倍数である。

条件 C　$\left|\dfrac{m+n+1}{2}\right|$ が奇数である。

条件 D　x についての方程式 $x^2 + (n-m+1)(x+1) = 0$ が重解をもつ。

このとき，以下の空欄に当てはまるものを語群から選び解答欄に (a) ～ (d) を 1 つずつ記入しなさい。また，（1）と（2）については，それが成り立つことを証明しなさい。

語群　(a) 必要十分条件である。

(b) 必要条件であるが，十分条件ではない。

(c) 十分条件であるが，必要条件ではない。

(d) 必要条件でも十分条件でもない。

（1）m と n が条件 B を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための $\boxed{}$

（2）m と n が条件 C を満たすことは，m と n が条件 D を満たすための $\boxed{}$

（3）m と n が条件 C を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための $\boxed{}$

（4）m と n が条件 D を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための $\boxed{}$

4．以下で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

5． 関数 $f(x)=\dfrac{e^{|x|}}{x}$ について以下の問いに答えなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

（1） $y=f(x)$ のグラフの概形をかきなさい。変曲点についても明記すること。なお，$f(x)$ に関する極限は証明せずに用いてよい。

（2） 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，原点を通るものの式を求めなさい。また，接点の座標をすべて求めなさい。