2022年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　公立大学中期日程　解答例

数学

注　下線の部分が解答

1.　（1）$m=26$　（2）$(x-2)^2+y^2=4$　（3）$\dfrac{7}{64}$　（4）$x \leqq -1$

（5）$a=2$　（6）$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$　（7）1　（8）①，③

2.　$|t-x|=\begin{cases} t-x & (t>x) \\ -(t-x) & (t \leqq x) \end{cases}$　より

$x<1$ のとき，　$f(x)=\int_1^2 (t^2-xt)\,dt=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{3}$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，

$$f(x)=-\int_1^x (t^2-xt)\,dt+\int_x^2 (t^2-xt)\,dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x+3$$

$x>2$ のとき，

$$f(x)=-\int_1^2 (t^2-xt)\,dt=\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$$

と表され，

$1<x<2$ のとき，$f'(x)=x^2-\dfrac{5}{2}=0$ とすると，$x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$x<1$ のとき，$f'(x)=-\dfrac{3}{2}<0$

$x>2$ のとき，$f'(x)=\dfrac{3}{2}>0$

となるから，$f'(x)$ の符号は $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ の前後だけで負から正に変化するので，$f(x)$ は $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ のときに最小となる。よって，求める最小値は $f\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)=\underline{\dfrac{18-5\sqrt{10}}{6}}$ となる。

3.

（１）語群の記号 (b)

（証明）

$$\sin\frac{m\pi}{2}=\cos\frac{n\pi}{2}=\sin\left(\frac{1-n}{2}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{m\pi}{2}=\frac{(1-n)\pi}{2}+2k\pi\quad \text{または}\quad \frac{m\pi}{2}=\pi-\frac{(1-n)\pi}{2}+2k\pi\qquad (k\text{は整数})$$

$$\Leftrightarrow\ m+n=4k+1\ \text{または}\ m-n=4k+1$$

これより，条件 A が成り立つとき，$\left|n^2-(m-1)^2\right|=\left|(n+m-1)(n-m+1)\right|$ について，

$n+m-1$ と $n-m+1$ の一方は必ず 4 の倍数となるので，条件 B は成り立つ。

条件 B が成り立つとき，例えば $m=1$，$n=2$ とすると，$\sin\frac{m\pi}{2}=1$，$\cos\frac{n\pi}{2}=-1$ となり

条件 A は成り立たない。

したがって，m，n が条件 B を満たすことは，m，n が条件 A を満たすための必要条件であるが，十分条件ではない。

（２）語群の記号 (d)

（証明）

条件 C が成り立つとき，例えば $m=0$，$n=1$ とすると，方程式は $x^2+2x+2=0$ となり重解をもたないので条件 D は成り立たない。

条件 D が成り立つとき，例えば $m=0$，$n=3$ とすると，$\frac{m+n+1}{2}=2$ となり条件 C は成り立たない。

したがって，m，n が条件 C を満たすことは，m，n が条件 D を満たすための必要条件でも十分条件でもない。

（３）語群の記号 (c)　　　　（４）語群の記号 (c)

4.　$a_{n+1}=4a_n+n\cdot 2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると，$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{n}{2}$ となる。

$b_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_1=0$，　$b_{n+1}=2b_n+\frac{n}{2}$ となる。

これをさらに

$$b_{n+1}+\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}=2\left(b_n+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

と変形すると，数列$\left\{b_n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}\right\}$は初項 1，公比 2 の等比数列となるから，

$$b_n+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=2^{n-1} \qquad \therefore \quad b_n=2^{n-1}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$$

よって，　$a_n=2^n b_n=2^n\left(2^{n-1}-\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$　を得る。

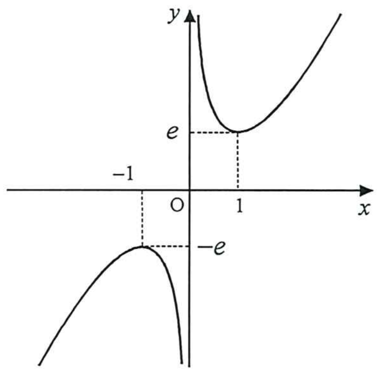
5.　（1）$f(-x)=-f(x)$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称なので $x>0$ の場合を考えれば十分である。

このとき，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ だから

$$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}, \qquad f''(x)=\frac{\left(x^2-2x+2\right)e^x}{x^3}=\frac{(x-1)^2+1}{x^3}e^x$$

ここで，$x>0$ のとき $f''(x)$ は常に正だから，グラフは変曲点をもたず下に凸で、増減表は次のようになる。

x	0	・・・	1	・・・
y'		$-$	0	$+$
y		↘	e	↗



$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ であり，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であることから，求めるグラフの概形は右図のようになる。

（2）$x>0$ における接点の座標を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は

$$y=\frac{t-1}{t^2}e^t x+\frac{2-t}{t}e^t$$

となり，これが原点を通るから　$t=2$　となる。

よって，求める接線の方程式は　$y=\dfrac{e^2}{4}x$　となる。

接点の座標はグラフの対称性より $\left(2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$，$\left(-2,\ -\dfrac{e^2}{2}\right)$ となる。