

令和 5(2023)年度 公立千歳科学技術大学 理工学部

一般選抜 前期日程 解答例

数学

注 下線の部分が解答

1.

- (1) -1 (2) $\frac{18}{5} < x < 12$ (3) $0 < x < 2$ (4) $\frac{21}{8}$
(5) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (6) 6 (7) 4 (8) $-x-1$

2.

- (1) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ より
 $x < 1$ または $x > 1$.

(2)

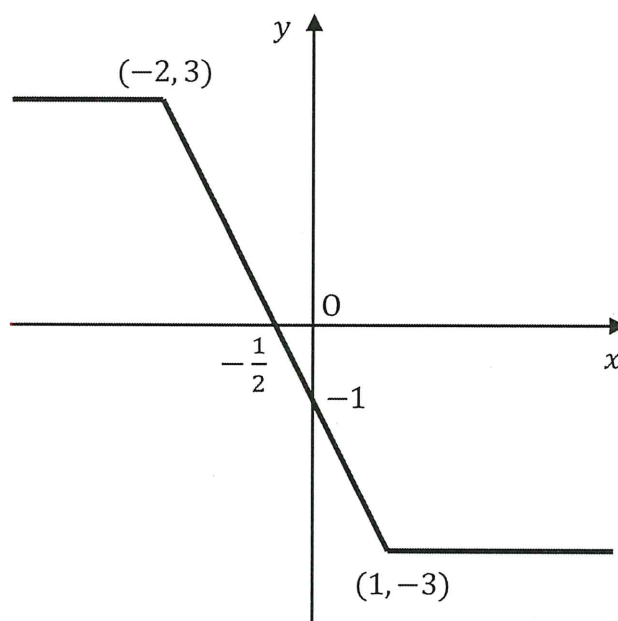
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} \\ &= \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+2)^2} \\ &= |x-1| - |x+2| \end{aligned}$$

より,

$$y = \begin{cases} 3, & (x < -2) \\ -2x-1, & (-2 \leq x < 1) \\ -3, & (1 \leq x) \end{cases}$$

と場合分けできる。

したがって、グラフは右図のとおり。



3.

(1) 式①より,

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = 4a_1 + 1 \cdot 2^1 = 4 \cdot 0 + 2 = 2,$$

$$a_3 = 4a_2 + 2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2 + 8 = 16.$$

したがって, $a_3 = 16$.

式②より, $r(3) = 2^{2 \cdot 3 - 1} - (3+1)2^{3-1} = 32 - 16 = \underline{16}$.

(2) 設問(1)の問題文と同様に, 式②の右辺を $r(n) = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1}$ と書く。

【1】 $n=1$ のとき, 式②の右辺は,

$$r(1) = 2^{2 \cdot 1 - 1} - (1+1)2^{1-1} = 2 - 2 = 0$$

となり, $r(1) = a_1$ が成り立つから, $n=1$ のとき式②が成り立つ。

【2】 $n=k$ (k は 1 以上の整数) に対して式②が成り立つと仮定する。つまり, $a_k = r(k)$ が成

り立つと仮定する。このとき, 式①において, $n=k$ と $a_k = r(k)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4r(k) + k \cdot 2^k = 4\{2^{2k-1} - (k+1)2^{k-1}\} + k \cdot 2^k = 4 \cdot 2^{2k-1} - \left\{4 \cdot \frac{k+1}{2} - k\right\} 2^k \\ &= 2^{2k+1} - \{2k+2-k\} 2^k = 2^{2(k+1)-1} - \{(k+1)+1\} 2^{(k+1)-1} = r(k+1) \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも式②が成り立つ。

【1】と【2】から数学的帰納法により, 1 以上のすべての整数 n について式②が成り立つ。

4.

(1) $y=c$ による半球の切り口は, 半径 $\sqrt{r^2 - c^2}$ の円である。

したがって, 切り口の面積は, $S(c) = \pi(r^2 - c^2)$ である。

(2) y 軸に関する回転体の公式より,

$$V_A = \int_{r/2}^r S(y) dy = \pi \int_{r/2}^r (r^2 - y^2) dy = \pi \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{r/2}^r = \frac{5}{24} \pi r^3.$$

また, 半球の体積 V は, $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ である。

したがって、 $V_B = V - V_A = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{5}{24}\pi r^3 = \frac{11}{24}\pi r^3$.

ゆえに、 $V_A : V_B = 5 : 11$.

以上。