# 2023年度

# 公立千歳科学技術大学　理工学部

# 一般選抜　公立大学中期日程　問題

# 数　学

| |
|---|
| 試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。 |

注意事項

1．受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄に記入すること。
2．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。
3．解答用紙の余白には，何も書いてはいけない。
4．問題冊子の余白は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。
5．下書き用紙は計算などに利用してよい。
6．提出した解答用紙以外はすべて持ち帰ること。

1．以下の問いに答えなさい。解答欄には答えのみ書きなさい。

（1）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の値を求めなさい。

（2）10進法で表した5桁の正の整数 A35B3 が9の倍数かつ最小になるようなAとBの値を求めなさい。

（3）$f(x) = -\cos^2 x + \sin x + \dfrac{3}{4}$ の最大値を求めなさい。

（4）$x \geqq 0$ において，$f(x) + \displaystyle\int_1^x 3t\,f'(t)\,dt = 3x^2 + 2x + 3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

（5）$f(x) = x\,|x+3|$ とする。方程式 $f(x) = k$ が1個の実数解をもつ $k$ の値の範囲を求めなさい。

（6）$\alpha = \log_2 e$ とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\log_2(2x+2)}{x}$ を $\alpha$ を用いて表しなさい。ただし，$e$ は自然対数の底である。

（7）関数 $f(x) = \sqrt{x} + 1$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ に対し，方程式 $f(x) = f^{-1}(x)$ を解きなさい。

（8）方程式 $3x + y + z + w = 12$ を満たす $x$，$y$，$z$，$w$ の0以上の整数解の組の総数を求めなさい。

2． 実数 $a$ を定数とする。方程式 $ax^2 = e^x$ の異なる実数解の個数を求めなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。ただし，$e$ は自然対数の底である。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \infty$ は証明せずに用いてよい。

3． 関数 $f(x)=\sin(\lambda x)$ に対し，$f(x)$ の第 $n$ 次導関数を $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ と書く。例えば，第 1 次導関数は $f'(x)=\dfrac{d^1}{dx^1}f(x)$ である。$\lambda$ を正の定数として，以下の問いに答えなさい。

（1）数学的帰納法により 1 以上のすべての整数 $n$ について $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)=\lambda^n f\left(x+\dfrac{n\pi}{2\lambda}\right)$ が成り立つことを証明しなさい。

（2）$g(x)=\cos(\lambda x)$ とする。$\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=A(x)f(B(x))$ を満たす $A(x)=a_1x+a_0$ と $B(x)=b_1x+b_0$ の係数 $a_1$，$a_0$，$b_1$，$b_0$ を求めなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

（3）関数 $g(x)$ を前問と同様に定める。次の**命題**において，$\boxed{\ *\ }$ に当てはまるものを（ア）～（エ）の選択肢から選び，その理由を説明しなさい。

**命題**：$0<\lambda<1$ であることは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ が収束するための $\boxed{\ *\ }$。

（ア） 必要条件であるが十分条件ではない

（イ） 十分条件であるが必要条件ではない

（ウ） 必要十分条件である

（エ） 必要条件でも十分条件でもない

4． 座標平面におけるサイクロイド $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を $C$ とする。以下の問いに答えなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

（1）曲線 $C$ 上の点 $\left(\dfrac{3}{2}\pi+1,\ 1\right)$ における接線 $L_1$ の方程式を求めなさい。

（2）曲線 $C$ の接線 $L_2$ が接線 $L_1$ と直交するとき，$L_1$ と $L_2$ の交点を求めなさい。

（3）曲線 $C$ と接線 $L_1$，$L_2$ のグラフをかきなさい。曲線と接線の接点の座標，および $L_1$ と $L_2$ の交点の座標を明記すること。

（4）曲線 $C$ と接線 $L_1$，$L_2$ で囲まれた領域の面積を求めなさい。

5．　座標空間における 4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で構成された四面体 OABC がある。 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，以下の問いに答えなさい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

（1）$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 $t$ に対して，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を M，辺 CO を $t:(1-t)$ に内分する点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と $t$ を用いて表しなさい。

（2）$0 \leqq u < 1$ を満たす実数 $u$ に対して，線分 MC を $u:(1-u)$ に内分する点を P とする。実数 $x$, $y$, $z$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ と表すとき，ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の和 $x+y$ を $u$ を用いて表しなさい。

（3）線分 MN の中点 Q に対し，直線 OQ と 3 点 A，B，C が定める平面との交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と $t$ を用いて表しなさい。

（4）線分 OR の長さの最小値を求めなさい。