令和 5(2023)年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　公立大学中期日程　解答例

数学

注　下線の部分が解答

1．

（1）$\dfrac{\pi}{4}$　（2）$A=1,\ B=6$　（3）$\dfrac{7}{4}$　（4）$f(x)=2x+6$

（5）$k<-\dfrac{9}{4},\ 0<k$　（6）$-\alpha$　（7）$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　（8）185

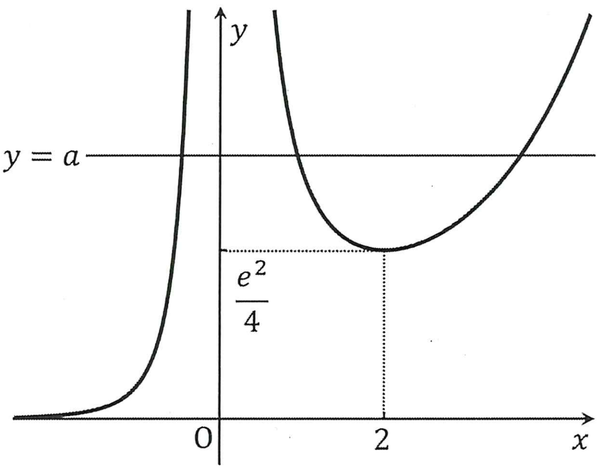
2．

$x=0$ は解になり得ないので，$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，$(x\neq 0)$ とおく。求めるべき方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である。

$f'(x)=\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{x-2}{x^3}e^x$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\infty$ より，$f(x)$ の増減表は，

x	$\cdots$	-0	0	$+0$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$				$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	∞		∞	↘	極小	↗

となる。したがって，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの概形は右図のとおり。以上から，解の個数は，



$a\leqq 0$ のとき，　0 個

$0<a<e^2/4$ のとき，　1個

$a=e^2/4$ のとき，　2 個

$a>e^2/4$ のとき，　3個

3．

（1）与えられた関係式の右辺を　$r(n)=\lambda^n f\left(x+\dfrac{n}{2\lambda}\pi\right)$　とおく。

【1】$n=1$のとき，

$$\frac{d^1}{dx^1}f(x)=\frac{d}{dx}\sin(\lambda x)=\lambda\cos(\lambda x)=\lambda\sin\left(\lambda x+\frac{1}{2}\pi\right)=\lambda^1 f\left(x+\frac{1}{2\lambda}\pi\right)$$

であり，$\dfrac{d^1}{dx^1}f(x)=r(1)$が成り立つ。

【2】$n=k$（kは1以上の整数）のとき$\dfrac{d^k}{dx^k}f(x)=r(k)$が成り立つと仮定すると，

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}f(x)=\frac{d^1}{dx^1}\left\{\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\lambda^k f\left(x+\frac{k}{2\lambda}\pi\right)\right\}=\lambda^k\frac{d}{dx}\left\{\sin\left(\lambda x+\frac{k}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\lambda^k\cdot\lambda\cos\left(\lambda x+\frac{k}{2}\pi\right)=\lambda^{k+1}\sin\left(\lambda x+\frac{k+1}{2}\pi\right)=\lambda^{k+1}f\left(x+\frac{k+1}{2\lambda}\pi\right)$$

であり，関係式$\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}f(x)=r(k+1)$は$n=k+1$のときも成り立つ。

【1】と【2】から数学的帰納法により，1以上の全ての整数nに対し，関係式が成り立つことが証明された。

（2）$f(x)g(x)=\sin(\lambda x)\cos(\lambda x)=\dfrac{1}{2}\sin(2\lambda x)$と変形できる。設問（1）で証明した関係式にて，$\lambda$を$2\lambda$に置換すると，

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=\frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}\sin\{(2\lambda)x\}=\frac{1}{2}(2\lambda)^n\sin\left\{(2\lambda)x+\frac{n}{2}\pi\right\}=2^{n-1}\lambda^n\sin\left\{\lambda\left(2x+\frac{n}{2\lambda}\pi\right)\right\}$$

$$=\left\{0\cdot x+2^{n-1}\lambda^n\right\}f\left(2x+\frac{n}{2\lambda}\pi\right).$$

したがって，求めるべき係数は，$a_1=0,\ a_0=2^{n-1}\lambda^n,\ b_1=2,\ b_0=\dfrac{n}{2\lambda}\pi$　である。

（3）【理由】設問（2）で記した通り，$\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=\dfrac{1}{2}(2\lambda)^n\sin\left(2\lambda x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$である。

ここで，$\left|\sin\left(2\lambda x+\dfrac{n}{2}\pi\right)\right|\leqq 1$であるから，$\left|\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}\right|\leqq\dfrac{1}{2}(2\lambda)^n$　が成り立つ。

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$が収束すること(※)は，$\lambda<\dfrac{1}{2}$であること，と同値である。

つまり，(※)$\Rightarrow\lambda<1$は成り立つが，$\lambda<1\Rightarrow$(※)は成り立たないため，【選択肢】は(ア)。

4.

（1）接点$(x,y)=\left(\dfrac{3\pi}{2}+1,1\right)$に対応する媒介変数$\theta$は，定義域$0\leqq\theta\leqq2\pi$において，$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

である。次に，曲線Cの接線の傾きは，媒介変数θを用いて$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ と

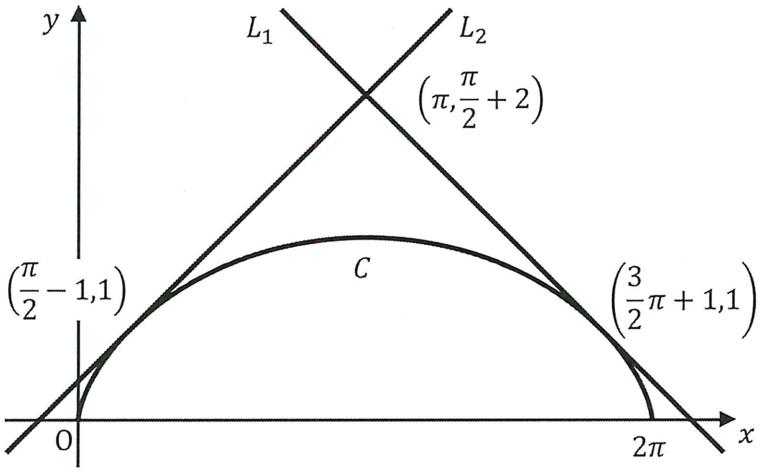
書けるから，上記の接点における接線の傾きは$\dfrac{\sin(3\pi/2)}{1-\cos(3\pi/2)}=-1$である。

よって， 接線のL_1の方程式は $y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$ である。

（2） 接線L_2は，L_1と直交することから，その傾きは $+1$ である。

接線の傾きが1となるθは，$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=1$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ である。よって，接線L_2は点$\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2},1-\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$を通る傾き1の直線であるから，$y=x-\dfrac{\pi}{2}+2$となる。したがって，接線$L_1$と$L_2$の交点は，$\left(\pi,\dfrac{\pi}{2}+2\right)$ である。

（3） 下図のとおり。



（4）接線L_2とx軸上の線分$[\pi/2-1,\pi]$に挟まれた台形の面積をS_1とすれば，

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{1+\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{8}+\pi+\frac{3}{2}$$ である。

次に，曲線Cとx軸上の線分$[\pi/2-1,\pi]$に挟まれた領域の面積をS_2とすれば，

$$S_2=\int_{\pi/2-1}^{\pi} y\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{3}{4}\pi+2.$$

ただし，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を用いた。以上から，求める面積Sは，直線$x=\pi$に関する対称性より，$S=2\left(S_1-S_2\right)=\underline{\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}-1}$ である。

5．

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-t)\vec{c}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\underline{-(1-t)\vec{a}-t\vec{b}+(1-t)\vec{c}}$.

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+u\vec{c}=(1-u)(1-t)\vec{a}+(1-u)t\vec{b}+u\vec{c}$ より

$x+y=(1-u)(1-t)+(1-u)t=\underline{1-u}$.

（3）$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1-t}{2}\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}+\dfrac{1-t}{2}\vec{c}$ であるから，実数kに対し，

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{(1-t)k}{2}\vec{a}+\dfrac{tk}{2}\vec{b}+\dfrac{(1-t)k}{2}\vec{c}$．点Rは線分 MC 上の点でもあるから (2)と同様に

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表したとき $x+y=1-z$ となる。よって，$\dfrac{(1-t)k}{2}+\dfrac{tk}{2}+\dfrac{(1-t)k}{2}=1$ より

$k=\dfrac{2}{2-t}$ を得る。ゆえに，$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2-t}\left\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}}$.

（4）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$ および$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2=\dfrac{1}{(2-t)^2}\left\{3(1-t)^2+t^2\right\}$.

ここで，$2-t=\dfrac{1}{v}$ とおいて整理すると $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2=7v^2-10v+4=7\left(v-\dfrac{5}{7}\right)^2+\dfrac{3}{7}$

となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|$ は $v=\dfrac{5}{7}$ すなわち $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{3}{7}}=\underline{\dfrac{\sqrt{21}}{7}}$ をとる。

以上。