令和 6 (2024) 年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　前期日程　解答例

数学

注　下線の部分が解答

1．

（1）$-\dfrac{1}{3}$	（2）$x=11111_{(2)}$ $y=10101_{(2)}$	（3）$\dfrac{128}{21}$	（4）$\sqrt{2}$
（5）e	（6）660	（7）$\dfrac{\pi}{2}$	（8）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

2．

$z=\dfrac{1}{1+iu}=\dfrac{1}{1+u^2}-\dfrac{u}{1+u^2}i$ において，実部と虚部をそれぞれ次のようにおくと，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+u^2} \\ y=-\dfrac{u}{1+u^2} \end{cases}$$

$x>0$ である。両式から u を消去すると，

$$y^2=\left(\frac{-u}{1+u^2}\right)^2=\frac{1+u^2-1}{\left(1+u^2\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=x-x^2$$

となるから，z が描く曲線は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \quad (x>0)$ である。

この曲線に原点を付け加えた図形は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円であるから

求める面積は　$S=\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{4}$

【別解】

$z=\dfrac{1}{1+iu}$ より $z\neq 0$ かつ $iu=\dfrac{1}{z}-1$

条件から iu は純虚数または 0 だから，$iu+\overline{iu}=\left(\dfrac{1}{z}-1\right)+\left(\dfrac{1}{\overline{z}}-1\right)=0$

$z\overline{z}$ を両辺にかけて整理すると，$\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{z}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ $\therefore \left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

これに $z=0$ を付け加えた図形は，点 $\dfrac{1}{2}+0i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円なので，$S=\dfrac{\pi}{4}$

3.（1）定義域 $x\neq 0$，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ より、増減表は以下のとおり。

x	・・・	0	・・・	1	・・・
$f'(x)$	−		−	0	+
$f(x)$	↘		↘	極小 e	↗

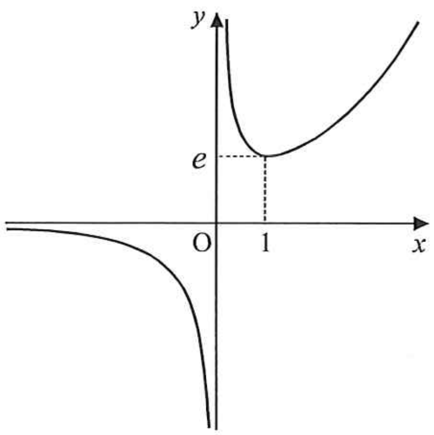
（2）$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ の極限値が

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$

であることと，（1）の増減表から，

$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり。



4.（1）x が実数のとき $|x|\geqq x$ が成り立つので，

$|a|+|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であることから，与式の両辺の平方の差を調べる。

$$\left(|a|+|b|\right)^2-|a+b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$$
$$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2$$
$$=2\left(|ab|-ab\right)$$

$|ab|\geqq ab$ であるから

$$\left(|a|+|b|\right)^2-|a+b|^2=2\left(|ab|-ab\right)\geqq 0$$

したがって，$\left(|a|+|b|\right)^2\geqq |a+b|^2$

$|a|+|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ より，$|a|+|b|\geqq|a+b|$

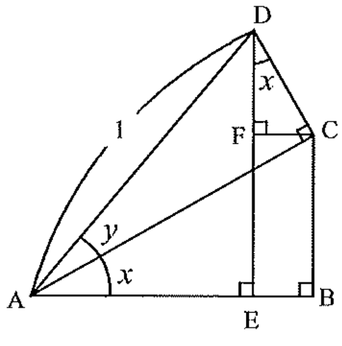
等号は，$|ab|=ab$ すなわち $ab\geqq 0$ のときである。

（2）$\sqrt{e}$ が無理数でないと仮定する。この仮定は $\sqrt{e}$ が有理数であることと同値である。このとき，$\sqrt{e}=\dfrac{a}{b}$ を満たす互いに素な正の整数 a, b が存在する。両辺を 2 乗すると $e=\dfrac{a^2}{b^2}$ となるが，右辺は，分母と分子がともに正の整数なので有理数である。しかし，左辺の e が無理数であることに矛盾する。したがって，背理法により $\sqrt{e}$ は無理数である。

（3）$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}\cos y=\cos y$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\cos x=\cos x\cos y$ である。
また，D から線分 AB に垂線 DE，C から線分 DE に垂線 CF を下ろすと，

$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}\cos(x+y)=\cos(x+y)$，

$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\sin y=\sin y$，
$\mathrm{BE}=\mathrm{CF}=\mathrm{CD}\sin x=\sin x\sin y$
である。よって，$\mathrm{AE}=\mathrm{AB}-\mathrm{BE}$ より，
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ が成り立つ。



以上。