2024年度

公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　公立大学中期日程　問題

数　学

試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。

注意事項

1．受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄に記入すること。
2．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。
3．解答用紙の余白には，何も書いてはいけない。
4．問題冊子の余白は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。
5．下書き用紙は計算などに利用してよい。
6．提出した解答用紙以外はすべて持ち帰ること。

1． 以下の問いに答えなさい。解答欄には答えのみ書きなさい。

（1）$|x|$ が十分小さいとき $\sin x \fallingdotseq x$ が成り立つことを利用して，$\sin 1^\circ$ の近似値を，小数第5位を四捨五入して小数第4位まで求めなさい。なお，$\pi = 3.142$とする。

（2）$y = x^{\frac{1}{x^2}}$ について $x = e$ における微分係数を求めなさい。e は自然対数の底とする。

（3）$|2x - 3| - 3|x - 5| + 12 < 0$ を満たす x の範囲を求めなさい。

（4）$I = \displaystyle\int_1^0 x^2(1-x)^7\,dx$ を求めなさい。

（5）関数 $f(x) = ||x^2 + 2x| - 1| - 1$ の最小値および $f(x)$ が最小となる x の値をすべて求めなさい。

（6）e を自然対数の底として，$y = e^{ax}\cos x$ が x についての恒等式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ を満たすとき，定数 a の値を求めなさい。

（7）方程式 $z^3 + 1 = 0$ を満たす複素数を偏角の小さい順に z_1，z_2，z_3 とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{z_1 z_2}{z_3}\right)^k$ を求めなさい。ただし，z_1，z_2，z_3 の偏角は0以上 2π 未満とする。

（8）数直線上を動く点Xが原点の位置にある。1から6の目をもつサイコロを1個投げて，出た目の回数だけコインを投げる。コインの表面が出るたびにXを正の向きに2だけ進め，裏面が出るたびにXを負の向きに1だけ進める。サイコロを1回投げるとき，原点からの点Xの距離が1以下となる確率を求めなさい。

2．　自然対数の底 e に対し，$F_n(x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{P}_{n-r}\, x^r$ とする。1 以上の整数 n に対し，正の実数 $\beta > \alpha > 0$ について

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^n e^{-x}\, dx = F_n(\alpha) - F_n(\beta) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明しなさい。

3． 以下の問いに答えなさい。ただし，e は自然対数の底とする。解答欄には計算過程も書きなさい。

（1）$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ であることを用いて $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{\log y}{y} = 0$ であることを証明しなさい。

（2）$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ であることを証明しなさい。

（3）$y = x \log|x|$ のグラフをかきなさい。また，変曲点の有無を明記し，変曲点がある場合はその座標を記しなさい。

4．　原点を O とする xy 座標平面において，実数 $\beta > 1$ と $0 < \theta < \pi$ に対し，点 A $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，点 B $(\beta, 0)$ がある。線分 OA の中点 M と，変数 $t < 1$ によって与えられる直線 OB 上の点 N $(t\beta, 0)$ に対し，直線 AN と直線 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えなさい。

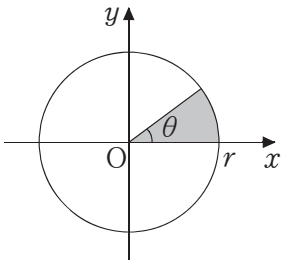
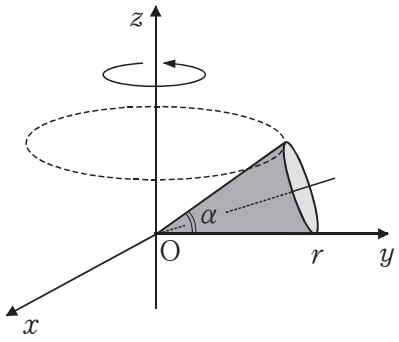
（1）$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ をそれぞれ，$\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表しなさい。解答欄には答えのみ書きなさい。

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表しなさい。解答欄には計算過程も書きなさい。

（3）直線 AB と直線 OP が直交するとき，変数 t を β，θ を用いて表しなさい。
また，そのときの交点を Q とすると，Q が線分 AB の外分点になるための必要条件を β，θ を用いて表しなさい。解答欄には計算過程も書きなさい。

5．以下の問いに答えなさい。解答欄には計算過程も書きなさい。また，答えは最も簡潔な数式として表しなさい。

（1）右図に示すように，xy 平面上の，中心角 θ，半径 r の扇形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_1 を求めなさい。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。



（2）母線の長さが r，頂角が α の円錐を，右図のように母線が xy 平面に接し，頂点が原点 O に重なるように置く。その状態で円錐を z 軸の周りに 1 回転させたとき，円錐が通ることによってできる立体の体積 V_2 を求めなさい。ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする。