令和 6 (2024) 年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　中期日程　解答例

数学

注　下線の部分が解答

1．

（1） 0.0175	（2） $-e^{\left(\frac{1}{e^2}-3\right)}$	（3） $x<0$ または $24<x$	（4） $-\dfrac{1}{360}$
（5） 最小値: $f(x)=-1$ 対応する x: $-1\pm\sqrt{2},\ -1$	（6） 2	（7） $-\sqrt{3}i$ （iは虚数単位）	（8） $\dfrac{139}{384}$

2．　$L_n(x)=\int_\alpha^\beta x^n e^{-x}dx$ とする。

$n=1$ のとき,

$$L_1(x)=\int_\alpha^\beta x\,e^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta e^{-x}dx$$

$$=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_\alpha^\beta$$

$$=\left[\left({}_1\mathrm{P}_0x^1+{}_1\mathrm{P}_1x^0\right)e^{-x}\right]_\beta^\alpha=F_1(\alpha)-F_1(\beta)$$

∴ $n=1$のとき①が成り立つ。

$n=k$のとき①が成り立つことを仮定する。このとき,

$$L_{k+1}(x)=\int_\alpha^\beta x^{k+1}e^{-x}dx=\left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_\alpha^\beta+(k+1)\int_\alpha^\beta x^k e^{-x}dx$$

$$=\left[x^{k+1}e^{-x}\right]_\beta^\alpha+(k+1)\left\{F_k(\alpha)-F_k(\beta)\right\}\quad=\left[x^{k+1}e^{-x}+(k+1)F_k(x)\right]_\beta^\alpha$$

$$=\left[e^{-x}\left\{x^{k+1}+(k+1)\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{P}_{k-r}x^r\right\}\right]_\beta^\alpha \qquad \cdots②$$

ここで, $(k+1)\,{}_k\mathrm{P}_{k-r}=(k+1)\dfrac{k!}{\{k-(k-r)\}!}=\dfrac{(k+1)!}{r!}={}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-r}$

が成り立つことに注意すると,

$$② = \left[e^{-x} \left\{ {}_{k+1}\mathrm{P}_0 x^{k+1} + \sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-r} x^r \right\} \right]_\beta^\alpha$$

$$= \left[e^{-x} \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-r} x^r \right]_\beta^\alpha = F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta)$$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

したがって，数学的帰納法により，1以上の任意の整数 n に対し，①が成り立つ。

3．

（1）$x>0$ において，$y=e^x$ の両辺の対数をとって $\log y = x$ である。つまり，$\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{\log y}{y}$ である。

また，$x\to+\infty$ のとき $y\to+\infty$ であるから，$\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ である。

（2）$x=y^{-1}$ とおくと $x\log x = y^{-1}\log y^{-1} = -\dfrac{\log y}{y}$ $\cdots(*)$ である。

$x\to+0$ のとき $y\to+\infty$ であることに注意して(*)に（1）を用いると，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{\log y}{y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}=0$ が成り立つ。

（3）$f(x)=x\log|x|$ とする。$f(-x)=-x\log|-x|=-x\log|x|=-f(x)$ であるから，

$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である。以下，$x>0$ について考える。

$f(x)=x\log x \quad (x>0)$ に対し，

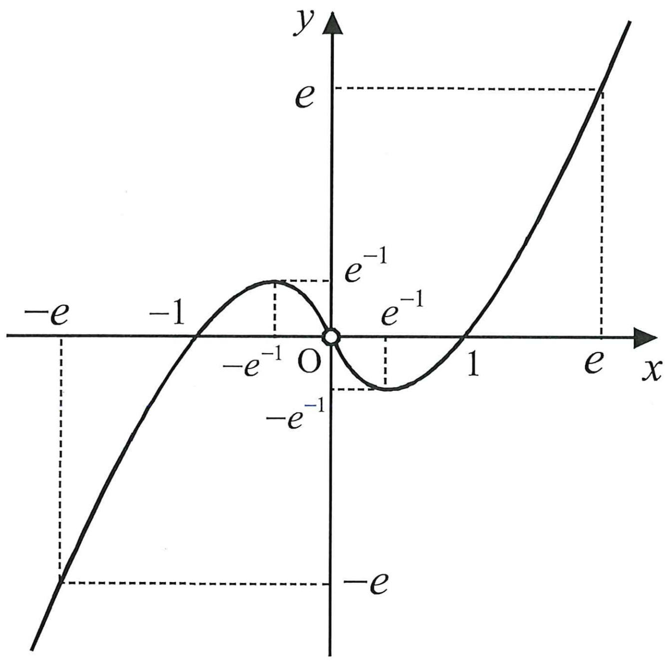
$$f'(x)=\log x + x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

であるから，増減表は次の通り。

x	(0)	・・・	e^{-1}	・・・
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	(0)	↘	極小 $-e^{-1}$	↗

原点での対称性と，(2)の極限に注意すると，グラフは下図のとおりである。変曲点は存在しない。



4．

（1）$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=-\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

（2）点Pが辺ANと辺BMをそれぞれ$k:1-k$と$l:1-l$に分割するとして，（1）の結果を用いると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AN}}=(1-k)\vec{a}+kt\vec{b} \qquad \cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}l\vec{a}+(1-l)\vec{b} \qquad \cdots ②$$

と２通りに書ける。しかし，一次独立な$\vec{a}$と$\vec{b}$による$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の表し方はただ一つであるから，

①と②は一致する。ベクトルの係数を比較して得られる連立方程式

$$\begin{cases} 1-k=\dfrac{1}{2}l \\ kt=1-l \end{cases}$$

の解$l=\dfrac{2-2t}{2-t}$を②に代入して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$

（3）直線ABと直線OPが直交するとき $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ が成り立つ。つまり，

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\frac{1-t}{2-t}\vec{a}+\frac{t}{2-t}\vec{b}\right\}=\frac{-(1-t)\left|\vec{a}\right|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2}{2-t}=0 \qquad (t<1)$$

である。$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=\beta$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\beta\cos\theta$ を代入して，

$$\underline{t=\frac{1-\beta\cos\theta}{\beta^2+1-2\beta\cos\theta}} \qquad \cdots ③$$

である。

次に，3点O, P, Qは同一直線上にあるので，変数 $u \geqq 1$ に対して，$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OP}$ と書けるから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1-t}{2-t}u\vec{a}+\frac{t}{2-t}u\vec{b} \qquad \cdots ④$$

であるが，点Qが直線AB上にあるため $\frac{1-t}{2-t}u+\frac{t}{2-t}u=1$ を満たす。よって，$u=2-t$ である。

これを④に代入すると

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

となる。これより，点Qが線分ABの外分点になるためには，$t<0$ または $t>1$ が必要である。

しかし，問題文より，変数 t の定義域は $t<1$ であるから，$t<0$ のみ考えればよい。

ゆえに，③より，$\frac{1-\beta\cos\theta}{\beta^2+1-2\beta\cos\theta}<0$ が必要である。ここで，実数 $\beta>1$ と $0<\theta<\pi$ のもとで，

$$\beta^2+1-2\beta\cos\theta=(\beta-\cos\theta)^2+\sin^2\theta>0$$

であるから，求める必要条件は $\underline{\beta\cos\theta>1}$ である。

5．

（1）題意の立体は，円錐と球の一部を接合したものである。

円錐の体積は，$\frac{1}{3}\pi(r\sin\theta)^2\cdot r\cos\theta=\frac{1}{3}\pi r^3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$ である。

球の一部の体積は，

$$\int_{r\cos\theta}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{r\cos\theta}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{r\cos\theta}^{r}$$

$$=\pi\left\{\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(r^3\cos\theta-\frac{1}{3}r^3\cos^3\theta\right)\right\}$$

$$=\pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)$$

となる。よって，求める体積は，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^3\sin^2\theta\cdot\cos\theta+\pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)$$

$$=\pi r^3\left\{\frac{1}{3}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\cos\theta+\frac{2}{3}-\cos\theta\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3\left(1-\cos\theta\right)$$

（２）（１）で求めた体積を θ の関数として $V_1(\theta)=\frac{2}{3}\pi r^3\left(1-\cos\theta\right)$ と書く。

求める立体の体積は，半径 r の半球の体積から $V_1\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ を差し引いた値である。

$$V_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3\left(1-\sin\alpha\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\alpha$$

以上。