令和 7(2025)年度　公立千歳科学技術大学理工学部

一般選抜　前期日程　解答例

数学

１．　（１）$a \leqq 1$　　（２）$-3 \leqq x < -\dfrac{5}{6}$ 、 $\dfrac{1}{6} < x \leqq 2$

（３）-9　　（４）$\dfrac{\pi}{4}$　　（５）$\vec{b} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{3},\ -2\right)$

２．　$a_1 = 2$　　…… ①

$a_{n+1} = 3a_n - n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　　…… ②

のとき、数列$\{a_n\}$の一般項が　$a_n = \dfrac{5\cdot 3^{n-1} + 2n + 1}{4}$　…… ③　であることを数学的帰納法によって示す。

$n = 1$のとき、式③の右辺は $\dfrac{5\cdot 3^{1-1} + 2\cdot 1 + 1}{4} = 2$ となり、式①の$a_1 = 2$と一致するから式③は$n = 1$で成り立つ。

$n = k$（kは正の整数）のとき、式③が成り立つと仮定すると、式②に式③を適用して

$$a_{k+1} = 3a_k - k = 3\times\frac{5\cdot 3^{k-1} + 2k + 1}{4} - k$$

$$= \frac{5\cdot 3^k + 2k + 3}{4} = \frac{5\cdot 3^{(k+1)-1} + 2(k+1) + 1}{4}$$

となり、式③は$n = k + 1$においても成立する。

よって、数学的帰納法により、任意の正の整数nにおいて式③は成立することが示された。

３．

（１） $z=\dfrac{2ui}{1+ui}=\dfrac{2ui(1-ui)}{(1+ui)(1-ui)}=\dfrac{2u^2+2ui}{1+u^2}$ 　　$\therefore$ $x=\dfrac{2u^2}{1+u^2}$ 　　$y=\dfrac{2u}{1+u^2}$

（２） $x^2=\dfrac{4u^4}{(1+u^2)^2}$ 、$y^2=\dfrac{4u^2}{(1+u^2)^2}$ であるから、

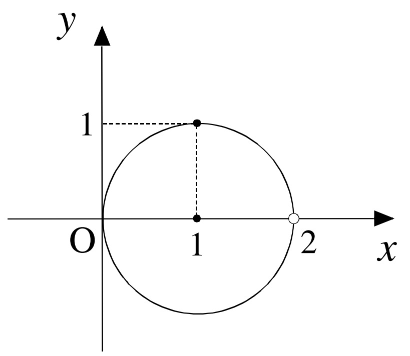
$$x^2+y^2=\frac{4u^4}{(1+u^2)^2}+\frac{4u^2}{(1+u^2)^2}=\frac{4u^4+4u^2}{(1+u^2)^2}=\frac{4u^2(u^2+1)}{(1+u^2)^2}=\frac{4u^2}{1+u^2}=2x$$

$\therefore$ 　$x^2+y^2-2x=0$

$(x-1)^2+y^2=1$

これは、点(1, 0)を中心とする半径 1 の円を表す。

なお、$x=\dfrac{2u^2}{1+u^2}=2-\dfrac{2}{1+u^2}<2$ 　より、$x\neq 2$ であるから点(2, 0)は除外される。



４．

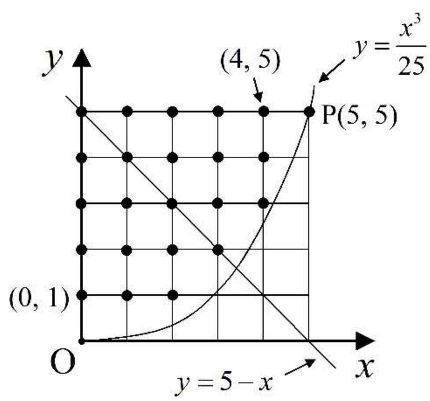
（１） +x 方向へ進むことを→、 +y 方向へ進むことを↑とすれば、原点 O から点 Q(i, j)まで至る道順の総数は、 →→↑↑→ …… のように i 個の→と j 個の↑を並べる方法の総数に等しい。これは、i 個の→と j 個の↑を置く i+j 個の場所から、→を置く i 個を選ぶ ${}_{i+j}C_i=\dfrac{(i+j)!}{i!\times j!}$ 通りとなる。

同様に、点 Q から点 P までの道順の総数は、${}_{(n-i)+(n-j)}C_{(n-i)}=\dfrac{(2n-i-j)!}{(n-i)!\times(n-j)!}$ 通りである。

よって、原点 O から点 Q を経て点 P に至る道順の数は、

$${}_{i+j}C_i \times {}_{(n-i)+(n-j)}C_{(n-i)} = \frac{(i+j)!\ (2n-i-j)!}{i!\ j!\ (n-i)!\ (n-j)!}$$ 通りである。

（２） $y \geqq \dfrac{x^3}{25}$ を満たす格子点は右図のとおりである。原点 O から点(0, 1)までの道順は１通り、点(4, 5)から点 P までの道順も１通りであるから、図に示した格子点において、点(0, 1)から点(4, 5)に至る道順を求めればよい。さらに、対象となる格子点は、直線 $y = 5 - x$ について対称であるから、点(0, 1)から直線 $y = 5 - x$ 上の四つの格子点までの道順の数を求めて、積の法則を適用してから和の法則を用いて合計すれば題意の道順の数となる。



点(0, 1)から点(0, 5)への道順　　1 通り

点(0, 1)から点(1, 4)への道順　　${}_4C_1 = \dfrac{4!}{3! \times 1!} = 4$ 通り

点(0, 1)から点(2, 3)への道順　　${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 通り

点(0, 1)から点(3, 2)への道順　　${}_4C_3 - 1 = \dfrac{4!}{1! \times 3!} - 1 = 3$ 通り

以上から、　$1 \times 1 + 4 \times 4 + 6 \times 6 + 3 \times 3 = 62$ 通り

５．

（１） $\overline{A} = \{2,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$、$\overline{B} = \{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$　であるから

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{5,\ 9,\ 11,\ 12\}$、

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$ であるから $\overline{A \cup B} = \{5,\ 9,\ 11,\ 12\}$ である。

以上から、$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ が成り立つ。

（２）

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{ac + adi + bci + bdi^2} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$
$$= (ac-bd)-(ad+bc)i$$

$$\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2}=\overline{a+bi}\cdot\overline{c+di}=(a-bi)\cdot(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)-(ad+bc)i$$
よって、$\overline{Z_1\cdot Z_2}=\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2}$　が成り立つ。

（３） $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$　より、
$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$=\cos^2\frac{\theta}{2}-\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$$

したがって、$2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=1+\cos\theta$

よって、$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　が得られる。