

令和 7(2025)年度 公立千歳科学技術大学理工学部

一般選抜 公立大学中期日程 解答例

数学

1.

$$(1) 1+6\sqrt{2} \quad (2) \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \quad (3) \frac{2}{e^{2x}(1+e^{-2x})^2}$$

$$(4) x \geq 2 \quad (5) \frac{21}{8} \quad (6) 10-\sqrt{5}$$

$$(7) a < -13, \quad -8 < a < 19 \quad (8) a = \frac{4}{9} \log 2$$

注) (7) の問題文において、異なる実数解の数を「ちょうど二つ」と記述しなかったため、実数解の数が 2 個以上の場合もありうる。と解釈できることから、その場合の解答 $a < 19$ も採点に際して正解とする措置を取った。

2.

曲線①と②および直線③は、直線 $y = x$ に対して対称であるから、点 P の座標を $P(s, t)$ とすれば、点 Q の座標は $Q(t, s)$ である。①より $t = s^2$ であるから、 $P(s, s^2)$ 、 $Q(s^2, s)$ である。なお、 $a = 0$ のとき $s = 0$ 、 $a = 2$ のとき $s = 1$ であるから $0 \leq s \leq 1$ である。PQ の長さを $f(s)$ とすると

$$f(s) = \sqrt{(s-s^2)^2 + (s-s^2)^2} = \sqrt{2}(s-s^2) \text{ である。両辺を } s \text{ で微分すると、} \frac{d}{ds} f(s) = \sqrt{2}(1-2s)$$

となるから、これを 0 とおくと $s = \frac{1}{2}$ となり、増減表は次のようになる。

s	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(s)$		+	0	-	
$f(s)$	0	↗	極大 $\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	0

増減表より、PQ の長さの最大値は、 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ である。

そのとき、 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ であるから、③より $a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ である。

3.

(1) 点 P が直線 AB 上にあるとき k を実数として、 $\vec{p} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}$ とおくことができ、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ はどちらも $\vec{0}$ ではなく互いに平行ではないので、 $s=1-k$ 、 $t=k$ $\therefore$ $s+t=1$

(2) $\vec{OC} = 3\vec{a}$ 、 $\vec{OD} = 4\vec{b}$ であるから、点 P が直線分 CD 上にあるとき、(1) と同様に l を実数として、 $\vec{p} = (1-l)\vec{OC} + l\vec{OD} = 3(1-l)\vec{a} + 4l\vec{b}$ 、 $0 \leq l \leq 1$ とおくことができる。したがって、

$$q = 3(1-l), r = 4l \quad \therefore \quad \underline{\frac{q}{3} + \frac{r}{4} = 1}, \quad \underline{0 \leq q \leq 3}, \quad \underline{0 \leq r \leq 4}$$

(3) $\vec{e} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと、 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = x(2, 3) + y(3, 2) \quad \therefore 2x+3y = -\frac{2}{3}, 3x+2y = \frac{1}{3}$ これを

解いて $x = \frac{7}{15}$ 、 $y = -\frac{8}{15}$ よって、 $\vec{e} = \frac{7}{15}\vec{a} - \frac{8}{15}\vec{b}$ である。同様に $\vec{f} = -\frac{1}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ である。

したがって、 $\vec{p} = u\vec{e} + v\vec{f}$ とおくと、

$$\vec{p} = u\left(\frac{7}{15}\vec{a} - \frac{8}{15}\vec{b}\right) + v\left(-\frac{1}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) = \left(\frac{7}{15}u - \frac{1}{10}v\right)\vec{a} + \left(-\frac{8}{15}u + \frac{2}{5}v\right)\vec{b}$$

点 P が直線分 CD 上にあるとき、(2) の q 、 r について $q = \frac{7}{15}u - \frac{1}{10}v$ 、 $r = -\frac{8}{15}u + \frac{2}{5}v$ である。

よって、これらを (2) で求めた q と r の関係式に代入して $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{15}u - \frac{1}{10}v\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{15}u + \frac{2}{5}v\right) = 1$

となるから、 $u+3v=45$ を得る。また、上記の q と r を (2) で求めた q と r の範囲を表す不等

式に代入して、 $0 \leq \frac{7}{15}u - \frac{1}{10}v \leq 3$ 、 $0 \leq -\frac{8}{15}u + \frac{2}{5}v \leq 4$ となる。 $u+3v=45$ を用いて、 u

と v それぞれの範囲を求めると、 $3 \leq u \leq 9$ 、 $12 \leq v \leq 14$ となる。

4.

(1) $y = \sqrt{1-\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow y^2 = 1-\sqrt{1-x} \quad \dots\dots ① \quad \text{かつ} \quad y \geq 0$

式①より $1-\sqrt{1-x} \geq 0$ かつ $1-x \geq 0 \quad \therefore$ $0 \leq x \leq 1$

$0 \leq x \leq 1$ において $\sqrt{1-x}$ は単調減少だから $1-\sqrt{1-x}$ は単調増加する。よって y は単調増加である。したがって、 $0 \leq y \leq 1$

(2) (1) で求めた範囲において、式①より $\sqrt{1-x} = 1-y^2 \quad \therefore 1-x = 1-2y^2+y^4 \quad \therefore x = 2y^2-y^4$

よって、 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f^{-1}(x) = 2x^2 - x^4 \quad (0 \leq x \leq 1)$

(3) $f^{-1}(x) = g(x)$ とおくと、

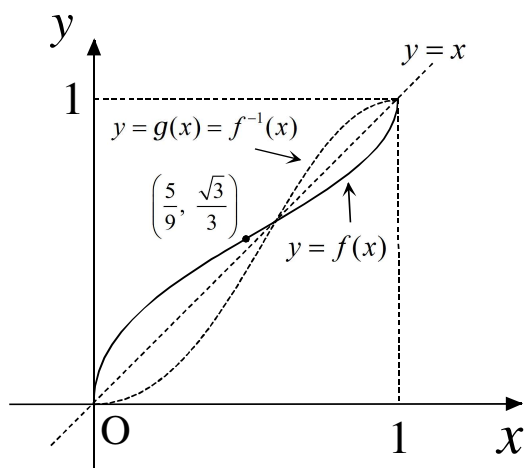
$$g'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1+x)(1-x)$$

$$g''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1+\sqrt{3}x)(1-\sqrt{3}x)$$

よって、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲での増減および $y = g(x)$ のグラフの凹凸は次の表のとおりである。

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$g'(x)$	0	+	+	+	0
$g''(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	$\nearrow$	変曲点 $\frac{5}{9}$	$\curvearrowright$	1

$y = f(x)$ のグラフは $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = x$ について対称だから、 $y = f(x)$ のグラフの変曲点は $\left(\frac{5}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。以上から $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



5.

$$(1) \quad z = \frac{1}{1+xi} = \frac{1-xi}{1+x^2} \quad \therefore \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2+1} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ g(x) = \frac{-x}{x^2+1} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \text{ より } \frac{1}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} \quad \therefore \quad x = -1$$

よって、求める交点の座標は $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ のみである。

(2)

$-1 \leq x \leq 0$ において、 $f(x) - g(x) = \frac{1+x}{x^2+1} \geq 0$ であるから、

$$S = \int_{-1}^0 \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{-x}{x^2+1} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1} dx, \quad I_2 = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx \quad \text{とおく。}$$

I_1 において $x = \tan \theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \rightarrow 0 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{4} \rightarrow 0 \end{array} \quad \text{であるから、}$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta = [\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\log(x^2+1)]_{-1}^0 = \frac{1}{2} (\log 1 - \log 2) = -\frac{1}{2} \log 2$$

$$\text{よって、} S = I_1 + I_2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2}}$$