2020年度　公立千歳科学技術大学理工学部

一般入試　前期日程　解答例

数学

1．（1）$\dfrac{22}{7}$　　（2）0　　（3）$\dfrac{\pi}{3}$　　（4）$\dfrac{2}{3}\pi$

（5）$x<\dfrac{-10-4\sqrt{19}}{3}$　，　$\dfrac{-10+4\sqrt{19}}{3}<x$　　（6）$\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3}$

（7）3　　（8）$\dfrac{1}{6}$

2．

$n=1$のとき

$(\text{左辺})=(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$　　$(\text{右辺})=\cos 1\theta+i\sin 1\theta=\cos\theta+i\sin\theta$

(左辺)＝(右辺) であるから与式は成り立つ。

$n=k$のとき $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ が成り立つと仮定すると，

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)^k\\
&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\
&=\cos\theta\cos k\theta+i\cos\theta\sin k\theta+i\sin\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta\\
&=\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta+i(\cos\theta\sin k\theta+\sin\theta\cos k\theta)\\
&=\cos(\theta+k\theta)+i\sin(\theta+k\theta)=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta
\end{aligned}
$$

となり，$n=k+1$のときも与式は成り立つ。

以上から，数学的帰納法により，1以上のすべての整数nについて

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立つ。

3．

（1）

$\log_a b=x$ とおくと，$a^x=b$ である。

c を底として両辺の対数をとると，$\log_c a^x = \log_c b$

与えられた公式より　$x \log_c a = \log_c b$

ここで，$a \neq 1$　より　$\log_c a \neq 0$　であるから，$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

よって，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　が成り立つ。

（2）

$\log_3 x + 12\log_x 3 - 7 = 0$　　　…①

真数条件および底の条件より，$0 < x < 1$，$1 < x$ である。

式①の両辺に　$\log_3 x$　をかけて　$(\log_3 x)^2 + 12\log_x 3 \cdot \log_3 x - 7\log_3 x = 0$

$$(\log_3 x)^2 + 12\frac{\log_3 3}{\log_3 x} \cdot \log_3 x - 7\log_3 x = 0$$

$$(\log_3 x)^2 - 7\log_3 x + 12 = 0$$

$$(\log_3 x - 3)(\log_3 x - 4) = 0$$

$\log_3 x = 3$　　　　　$\log_3 x = 4$

$x = 3^3 = 27$　　　　　$x = 3^4 = 81$　　　　　　　　$\underline{x = 27,\ 81}$

4．

$y = f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$　とおくと，$f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$　　$f'(x) = 3x^2 - 16x + 17$

接点の座標を (X, Y) とすると，接線の傾きについて $f'(X) = \dfrac{Y}{X}$　が成り立つ。

$$3X^2 - 16X + 17 = \frac{X^3 - 8X^2 + 17X - 10}{X}$$

$$X^3 - 4X^2 + 5 = 0$$

$$(X+1)(X^2 - 5X + 5) = 0$$

$X = -1$，　　$X = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

$f'(-1) = 3 + 16 + 17 = 36$　　　$\therefore$　$X = -1$ に対応する接線は，$y = 36x$

$$f'\left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = 3\left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + 17 = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$$　　（複号同順）

$\therefore$　$X = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ に対応する接線は，$y = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}x$

求める接線の方程式は，　$\underline{y=36x}$，　　$\underline{y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$，　　$\underline{y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}x}$

5．

放物線 C： $y=x^2$ の２つの接点を $\mathrm{A}(s,\ s^2)$，$\mathrm{B}(t,\ t^2)$ とすると，$y'=2x$ であるから２つの接線の方程式は，$y=2sx-s^2$ ・・・①，　$y=2tx-t^2$ ・・・②　とおくことができる。

①と②の交点の x 座標を求めるために，①と②から y を消去すると $2(s-t)x=s^2-t^2$ となる。

ここで，$s\neq t$ であるから $x=\dfrac{s^2-t^2}{2(s-t)}=\dfrac{s+t}{2}$ を得る。

①より交点の y 座標は　$y=2s\cdot\dfrac{s+t}{2}-s^2=st$　となる。

①と②が直交するとき，$2s\cdot 2t=4st=-1$　であるから　$st=-\dfrac{1}{4}$　となる。

$s\neq 0$ において，$x=\dfrac{s+t}{2}=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{4s}\right)$，　$y=st=-\dfrac{1}{4}$　となる。

ここで　$f(s)=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{4s}\right)$ とおくと，$f'(s)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{4s^2}\right)>0$　であり，

$$\lim_{s\to+\infty}f(s)=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)=+\infty,\qquad \lim_{s\to-0}f(s)=\lim_{s\to-0}\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)=+\infty$$

$$\lim_{s\to-\infty}f(s)=\lim_{s\to-\infty}\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)=-\infty,\qquad \lim_{s\to+0}f(s)=\lim_{s\to+0}\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)=-\infty$$

であることから，s が 0 を除くすべての実数をとるとき，x もすべての実数をとる。

よって，求める軌跡は，直線　$\underline{y=-\dfrac{1}{4}}$ であり，軌跡を図示すると右の図のようになる。