2020年度　公立千歳科学技術大学理工学部

一般入試　公立大学中期日程　解答例

数学

1．（1）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　（2）$x \leqq -6,\quad 4 \leqq x$　　（3）$10-\sqrt{5}$　　（4）-1

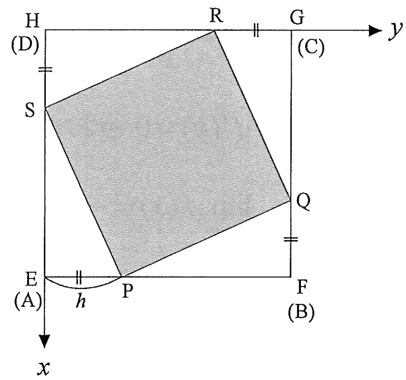
（5）2, 34　　（6）-1　　（7）$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{5}{3}\pi$　　（8）5775 通り

2．

D(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，C(0, a, 0)，H(0, 0, a)となるように立方体を座標軸上に配置する。

題意より，動点P，Q，R，Sのz座標は等しいので，その値をhとすると，P(a, h, h)，Q($a-h$, a, h)，R(0, $a-h$, h)，S(h, 0, h)と表される。これを用いると，

$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\mathrm{RS}=\mathrm{SP}=\sqrt{h^2+(a-h)^2}=\sqrt{2h^2-2ah+a^2}$　となる。



したがって，四角形PQRSは正方形であり，その面積はhの関数として次のようになる。

$$S(h)=\left(\sqrt{2h^2-2ah+a^2}\right)^2=2h^2-2ah+a^2$$

よって，求める立体の体積は，

$$V=\int_0^a S(h)dh=\int_0^a\left(2h^2-2ah+a^2\right)dh=\left[\frac{2}{3}h^3-ah^2+a^2h\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3-a^3+a^3=\frac{2}{3}a^3$$

$$\underline{V=\frac{2}{3}a^3}$$

3．

（1）$n=1$のとき，

$a_1=\dfrac{3^{1-1}+2}{3^{1-1}-2}=\dfrac{1+2}{1-2}=-3$　であるから，与式は成り立つ。

$n=k$のとき　$a_k=\dfrac{3^{k-1}+2}{3^{k-1}-2}$　が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{2a_k+1}{a_k+2}=\frac{2\times\dfrac{3^{k-1}+2}{3^{k-1}-2}+1}{\dfrac{3^{k-1}+2}{3^{k-1}-2}+2}=\frac{2\times\left(3^{k-1}+2\right)+3^{k-1}-2}{3^{k-1}+2+2\left(3^{k-1}-2\right)}=\frac{3\times 3^{k-1}+2}{3\times 3^{k-1}-2}=\frac{3^k+2}{3^k-2}$$

となり， $n=k+1$ のときも与式は成り立つ。

以上から，数学的帰納法により，すべての自然数について $a_n=\dfrac{3^{n-1}+2}{3^{n-1}-2}$ であることが示された。

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+2}{3^{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{3^{n-1}}}{1-\dfrac{2}{3^{n-1}}}=1$ 　　　　 $\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1}$

4．

$f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x}$ とおくと　$f'(x)=-x^{-2}e^{x^2}+x^{-1}e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}\left(2-x^{-2}\right)=e^{x^2}\times\dfrac{2x^2-1}{x^2}$

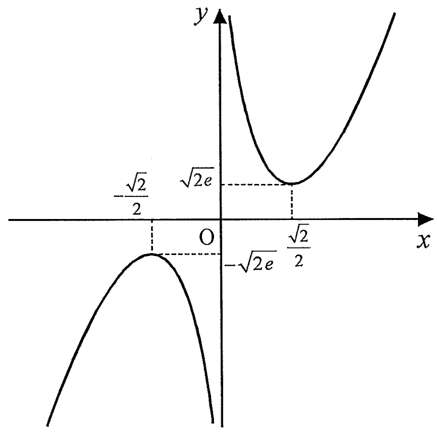
$f'(x)=0$ とおくと， $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 　　　 $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pm\sqrt{2e}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

以上から $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	極大 $-\sqrt{2e}$	↘	／	↘	極小 $\sqrt{2e}$	↗	$+\infty$

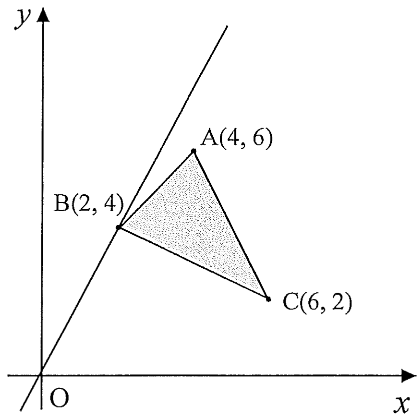
したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。このグラフと直線 $y=a$ の共有点を考えて，実数解の個数は次のようになる。



$-\sqrt{2e}<a<\sqrt{2e}$ のとき　　　　解は 0 個
$a=\pm\sqrt{2e}$ のとき　　　　解は 1 個
$a<-\sqrt{2e}$ または $\sqrt{2e}<a$ のとき　　　　解は 2 個

5．

（1） $y=x+2$，　$y=-2x+14$，　$y=-\dfrac{1}{2}x+5$　を連立して解くと，３つの直線の交点は，A(4, 6)，B(2, 4)，C(6, 2) であるから，領域 D は図のような△ABC である。



$y-2x=k$　とおくと，　$y=2x+k$　　・・・①

k が最大になるのは，直線①が点B(2, 4) を通るときであるから，　$4=2\times2+k$　　　∴　k の最大値は　$k=0$　である。

x^2+y^2 は，D の周および内部の点と原点との距離の２乗である。これが最大になるのは，点 A，B，C のうち原点から最も遠い点A(4, 6) のときである。　$4^2+6^2=16+36=52$　　よって，x^2+y^2　の最大値は 52 である。

$y-2x$ の最大値　<u>0</u>　　　x^2+y^2 の最大値　<u>52</u>

（2）求める円の方程式を，$(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$　とおいて，３つの交点 A，B，C の座標を代入する。

$$\begin{cases}(4-a)^2+(6-b)^2=r^2\\(2-a)^2+(4-b)^2=r^2\\(6-a)^2+(2-b)^2=r^2\end{cases}$$

r を消去して整理すると次のようになる。

$a+b=8$　　　　$2a-b=5$

∴　$a=\dfrac{13}{3}$，　$b=\dfrac{11}{3}$

これを用いて r^2 を求めると

$$r^2=\left(2-\frac{13}{3}\right)^2+\left(4-\frac{11}{3}\right)^2=\left(-\frac{7}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{49}{9}+\frac{1}{9}=\frac{50}{9}$$

よって，求める円の方程式は，$\underline{\left(x-\dfrac{13}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{50}{9}}$　となる。