# 2021年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

# 一般選抜　前期日程　解答例

## 数学

注　下線の部分が解答

1.

（1）$x=-3,\ -1$　（2）$\theta=\dfrac{\pi}{4}$　（3）$f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$　（4）$-2<a<0$

（5）138600通り　（6）18　（7）2366　（8）$x=63$

2.　$n=1$のとき，$n\left(n^2+2\right)=1\times\left(1^2+2\right)=3$であるから，$n\left(n^2+2\right)$は3の倍数である。

$n=k$のとき，$k\left(k^2+2\right)$が3の倍数であると仮定すると，ある正の整数$m$が存在して$k\left(k^2+2\right)=3m$と書くことができる。

$n=k+1$のとき，

$$\begin{aligned}n\left(n^2+2\right)&=(k+1)\left\{(k+1)^2+2\right\}=(k+1)\left(k^2+2k+3\right)=k^3+2k^2+3k+k^2+2k+3\\&=k\left(k^2+2\right)+3\left(k^2+k+1\right)=3m+3\left(k^2+k+1\right)\\&=3\left(m+k^2+k+1\right)\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$のときも$n\left(n^2+2\right)$は3の倍数である。

よって，数学的帰納法により，すべての正の整数$n$について$n\left(n^2+2\right)$は3の倍数である。

3.

（1）接点Pの座標を$\left(t,\ t^2-1\right)$とする。$y=x^2-1$に対して$y'=2x$であるから，点Pにおける接線$\ell$は$y=2t(x-t)+t^2-1=2tx-t^2-1$　…①となる。

$t=0$のとき，直線OPは$y$軸となり，①は$y=-1$であるから両者は直交する。

$t\neq0$のとき，直線OPの傾きは$\dfrac{t^2-1}{t}$となる。したがって，直線OPと接線$\ell$が直交するとき，$2t\cdot\dfrac{t^2-1}{t}=2\left(t^2-1\right)=-1$となるから，$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$である。

以上から，接線$\ell$と対応する点Pの座標は以下のとおりである。

$\ell$：$\underline{y=-1}$，　　P：$\underline{(0,\ -1)}$，

$\ell$： $y=\sqrt{2}x-\dfrac{3}{2}$，　　P：$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，

$\ell$： $y=-\sqrt{2}x-\dfrac{3}{2}$，　　P：$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

（2）（1）より $\ell_1$： $y=\sqrt{2}x-\dfrac{3}{2}$，$\ell_2$： $y=-\sqrt{2}x-\dfrac{3}{2}$ となる。

面積を求める部分は $y$ 軸に対して対称であるから，求める面積は以下のようになる。

$$S=2\times\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{x^2-1-\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2}\right)\right\}dx=2\times\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=2\times\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

4.　$\cos\theta=t$ とおくと $-1\leqq t\leqq 1$ である。$y$ を $t$ で表すと

$$y=2t^2-3t-5=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$$

である。

以上から，$y$ の最小値は $-\dfrac{49}{8}$ である。

$t=-1$ のとき $y=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-5=0$ となるから，$y$ の最大値は $0$ である。