2021 年度　公立千歳科学技術大学　理工学部

一般選抜　公立大学中期日程　解答例

数学

注　下線の部分が解答

1.　（1）$(x,\ y)=(\sqrt{2},\ 1),\ (4,\ -1)$　　（2）$x<\dfrac{5}{6},\quad x>\dfrac{5}{6}$

（3）$f'(x)=6x^5+60x^4+192x^3+192x^2$　　（4）$z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\quad -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

（5）y の最小値 -1　　そのときの $x=\pm 1$　　（6）①(c)　②(b)　③(b)　④(a)

（7）$\dfrac{11}{192}\pi$　　（8）0

2.

（1）$\cos^2 x \leqq 1$　である。

また，$0 \leqq 1+\cos 3x$ であるから，$1 \leqq 2^{1+\cos 3x}$ である。

よって，$\cos^2 x \leqq 2^{1+\cos 3x}$ が成り立つ。

（2）（1）の過程より，$\cos^2 x = 2^{1+\cos 3x}$ のとき，$\cos^2 x = 2^{1+\cos 3x} = 1$ である。

このとき，$\cos x=\pm 1$ かつ $1+\cos 3x=0$ である。

両式を満たす解は，$\underline{x=(2k+1)\pi\ （k\text{は整数}）}$ である。

3.　$3^n-1 \geqq \dfrac{n}{2}(n+3)$　…①　（n は正の整数）が成り立つことを示す。

$n=1$ のとき，$3^1-1=2$，$\dfrac{1}{2}(1+3)=2$ であるから①は成り立つ。

$n=k$ のとき，$3^k-1 \geqq \dfrac{k}{2}(k+3)$ が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$ のとき，

$$3^{k+1}-1-\frac{k+1}{2}(k+1+3)=3\cdot 3^k-1-\frac{(k+1)(k+4)}{2}$$

$$\geqq 3\cdot\left\{\frac{k}{2}(k+3)+1\right\}-1-\frac{(k+1)(k+4)}{2}=k^2+2k>0$$

となり，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

よって，数学的帰納法により，すべての正の整数 n について $3^n-1 \geqq \dfrac{n}{2}(n+3)$ は成り立つ。

4.　$C: y=x^3+3x^2$ について $y'=3x^2+6x$ である。曲線 C 上の点 $\left(t,\ t^3+3t^2\right)$ における C の接線の方程式は，$y-\left(t^3+3t^2\right)=\left(3t^2+6t\right)\left(x-t\right)$ であるから $y=\left(3t^2+6t\right)x-2t^3-3t^2$ となる。

この接線が点 A（2，a）を通るとき，$a=\left(3t^2+6t\right)\times 2-2t^3-3t^2$ となる。これを整理して

$a=-2t^3+3t^2+12t$　…①　を得る。

方程式①を満たす実数 t の個数と，点 A から曲線 C に引くことができる接線の本数は等しい。

$f(t)=-2t^3+3t^2+12t$ とおくと $f'(t)=-6t^2+6t+12=-6\left(t+1\right)\left(t-2\right)$，

$f(-1)=2+3-12=-7$，$f(2)=-16+12+24=20$

であるから，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	・・・	-1	・・・	2	・・・
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-7	↗	20	↘

以上から，求める a の範囲は $-7<a<20$ 。

5.（1）$a_1>0$ であり，$a_k>0$ とすれば式の形より $a_{k+1}>0$ であることがわかるので，すべての n について $a_n>0$ である。

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{12na_n+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{12na_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+12n$$

であるから，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とすれば，$b_{n+1}=3b_n+12n$ を得る。

（2）$b_{n+1}=3b_n+12n$　…①　において，n を $n+1$ とおくと，$b_{n+2}=3b_{n+1}+12\left(n+1\right)$　…②

②－①より $b_{n+2}-b_{n+1}=3\left(b_{n+1}-b_n\right)+12$

$c_n=b_{n+1}-b_n$ なので，$c_{n+1}=3c_n+12$　⇔　$c_{n+1}+6=3\left(c_n+6\right)$ となる。

よって，数列 $\left\{c_n+6\right\}$ は公比 3 の等比数列である。

また，$a_1=1$，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，$a_2=\dfrac{1}{15}$，$b_2=\dfrac{1}{a_2}=15$　である。

よって，$c_1=15-1=14$ である。

以上より，$c_n=3^{n-1}\left(c_1+6\right)-6=20\cdot 3^{n-1}-6$ である。

（3）数列 $\left\{c_n\right\}$ は数列 $\left\{b_n\right\}$ の階差数列なので，$n\geqq 2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(20\cdot 3^{k-1}-6\right)=1+20\times\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-6\left(n-1\right)$$

$$=10\cdot 3^{n-1}-6n-3$$

$n=1$ とすると，$10-6-3=1$ となり，b_1 と一致するので，

$b_n=10\cdot 3^{n-1}-6n-3$（$n\geqq 1$）および $a_n=\dfrac{1}{10\cdot 3^{n-1}-6n-3}$（$n\geqq 1$）である。