粒度値ファジィ集合に関する考察

On Granularity-valued Fuzzy Sets.-

村井哲也（Tetsuya MURAI）
Tel : 0123-27-6049　E-mail: t-murai@photon. chitose. ac. jp

Abstract : This article deals with a newly introduced granularity-valued fuzzy sets and we discuss characteristics of membership functions of the granularity-valued fuzzy sets. This new class of fuzzy sets is inspired by Kansei engineering and is aimed at formulating abstract Kansei texture.　Granularity-valued fuzzy sets take partition-lattices as membership values for their elements.　The characteristics of partition lattices are non-distributivity and non-orthocomplementation.　The latter is the main characteristics of partition lattices which is different from orthogonal modular lattices which corresponds to quantum logic.　In a parallel way, we can compare with granularity-valued fuzzy sets with quantum sets.

１．はじめに

椎塚[5]は感性システムのフレームワークを提唱し，人工感性の領域では，個人個人とそのときの状況(コンテクスト)に合わせて，各個人毎に異なる対応を可能とするシステムが研究対象である，とした．本稿では，人工感性システム設計のために抽象感性テクスチャという概念を想定し，その一面である粒状性の程度，すなわち「粗さ－細かさ」を表現する分割束の値をメンバシップ値とする一種のファジィ集合(Zadeh[7])に関する基礎的考察を行う．

本研究の基本的考え方と経緯を述べる．従来の感性工学の研究では「感性語」という言語的対象を媒介として人間の感性を捉えようとするアプローチが多かった．それに対して，本研究では，人が直感的に持つ「感性」，すなわち，「こんな感じ」「あんな感じ」など，言葉の意味によらない感性の「質感」を「抽象感性テクスチャ」というべき存在に託し，テクスチャを構成するシステムにマッピングすることで，ユーザの感性がそのシステムをその個人向けにカスタマイズされることを目標とする．それが実現できれば，ユーザはまるで箱庭を作るように抽象感性テクスチャ空間の設定を操作して，自分の感性をシステムに反映させることができるであろう．

そのような抽象感性テクスチャの一面を数学的に定式化する可能性として，分割束の値をメンバシップ値とするファジィ集合が考えられる．Zadeh[7]が 53 年前に提唱した標準的なファジィ集合はメンバシップ値を単位閉区間 I=[0,1]の値とするもので，1980 年代に制御への応用も含めて十分研究し尽くされ，基本技術として定着した．更に，Goguen[2]はメンバシップ値の集合を I=[0,1]から順序集合 L へ拡張した L-ファジィ集合を提唱し，強い論理的性質を持つ部分クラスである完備分配束(Birkhoff[1])の場合を主に考察した．

これまで，L-ファジィ集合の研究の流れでは，非分配束値のファジィ集合に関してはほとんど扱われていない．しかし，非分配束にも応用上，有用なクラスがある．すなわち，杉原[7]によると，量子物理では分配性の成立が観測問題と矛盾するため，量子現象を記述する量子論理には非分配的な直交可補モデュラー束が対応する．しかし，テクスチャを「粗さ－細かさ」(粒状性)という観点で表現する分割束では直交可補性さえ成立しない．すなわち，分割束に対応する論理は量子論理より更に弱いクラスであり，これまでほとんど研究が展開されてこなかったのである．

２．分割

有限集合 $X = \{ x_1 ,\ldots, x_n \}$の部分集合族 $P = \{ X_k \}_{k\in\Lambda}$ が X の分割であるとは

(1) $X = \cup \{ X_k \mid k\in\Lambda \}$,

(2) $\forall i, j \in\Lambda (i \neq j \to X_i \cap X_j =\emptyset)$

を満たすときである．集合 X のすべての分割の集合を PRT (X) で表す．

PRT (X) には分割の細分によって順序が入る．分割 $P = \{ X_k \}_{k\in\Lambda}$ が $P' = \{ X'_k \}_{k\in\Lambda'}$の細分であるとは，条件「$\forall k\in\Lambda \exists k'\in\Lambda' (X_k \subseteq X'_{k'})$」を満たすときである．

分割間の２項関係 $\sqsubseteq$ (PRT (X)× PRT (X)) を

$P \sqsubseteq P' \Leftrightarrow P$ が P'の細分

によって定義すると，

反射律 $\forall P (P\sqsubseteq P)$

対称律 $\forall P\forall P' (P\sqsubseteq P' \Rightarrow P'\sqsubseteq P)$

推移律 $\forall P \forall P' \forall P'' ((P \sqsubseteq P' \wedge P' \sqsubseteq P'') \Rightarrow P \sqsubseteq P'')$

を満たすので，順序関係である．更に，任意の分割 P, P' に対して，上限 $\sqcup$ と下限 $\sqcap$ が存在するので束となる．また，最大元と最小元を持つが，前稿[]で述べたように一般に分配律は満たさず，モジュラー束となり，直交可補性も満たさない．

一般に，束が非分配束となるための必要十分条件は部分束として次の図２の束を部分束として含むことである．

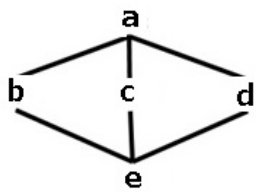

図１．非分配束の必要十分条件となる部分束

図２は３元集合{1,2,3}の可能な分割がなす分割束であり，図１と同型．つまり，図１そのものであるから，非分配束である．

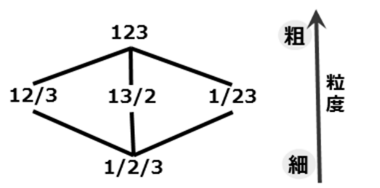

図２．３元集合{1,2,3}の分割がなす束

また，図３は４元集合{1,2,3,4}の可能な分割たちがなす分配束であり，やはり非分配束である．

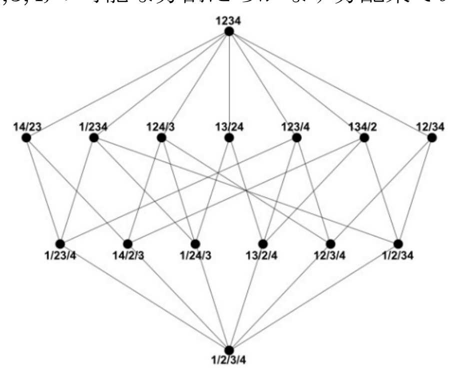

図３．４元集合{1,2,3,4}の分割がなす束

非分配束では一般に補元を一意に定められない．例えば，非分配束であるモデュラー束は一意的な補元はないが，直交可補性を持つ．直交可補性とは補元を一意に定めることはできないが，図４のように互いに比較不能な要素が偶数個存在すれば，それらからペアを作って互いに補元として振舞うように定義できることをいう．

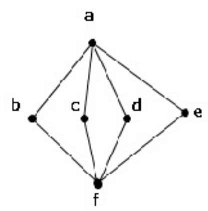

図４．６元集合の束

図 4 では例えば，b と c，d と e を選べば，それは互いの補元として振舞う．

しかし，分割束の場合は直交可補性さえ持ちえない．一般に，n の要素を k 分割する総数を第２種スターリング数 $S_{n,k}$ という．これにより，比較不能な要素が奇数個になるからである．実際，第２種スターリング数は漸化式

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1}+kS_{n-1,k}$$

で与えられるが，n 元からなる全体集合を 2 分割する可能な数 $S_{n,2}$ は，$S_{n-1,1}=1$ が成り立つことより

$$S_{n,2}=S_{n-1,1}+2S_{n-1,2}=1+2S_{n-1,2}$$

となり，必ず奇数である．よって，分割束は直交可補性を持ちえず量子論理の束より更に弱いことがわかる．すなわち，分割束は補元が一意的に決まらない多意可補束[6]である．

３．粒度値ファジィ集合

定義域を U とし，分割束 PRT (X) を値域とするファジィ集合を本稿では U 上の粒度値ファジィ集合と呼ぶ：

$$\mu : U \rightarrow \mathrm{PRT}\,(X).$$

分割束の順序と上限，下限と使って，粒度値ファジィ集合の包含関係と和集合，積集合をそれぞれ以下で定義できる：

$$\mu \subseteq \mu' \Leftrightarrow \forall x \in U\ (\ \mu(x) \sqsubseteq \mu'(x)\ ),$$
$$(\mu \cup \mu')(x) = \mu(x) \sqcup \mu'(x),$$
$$(\mu \cap \mu')(x) = \mu(x) \sqcap \mu'(x).$$

U 上の粒度値ファジィ集合全体 GF(U) は少なくとも最大元

$$I(x) = \{X\}\ (\text{for } \forall x \in U)$$

と最小元

$$O(x) =\{\ \{x_1\}, \ldots ,\{x_n\}\ \}\ (\text{for } \forall x \in U)$$

を持つモジュラー束である．しかし，補集合または補集合相当の演算は定義できない．

４．おわりに

メンバシップ値として粒度を表現する分割束の値を取る集合は，例えば，「仕事」，「女性」に対する個人の感性について次のような集合記述ができる：

仕事(太郎)＝大雑把(ざらざら)
仕事(次郎)＝そこそこ(ふつう)
女性(太郎)＝繊細(すべすべ)
女性(次郎)＝大雑把(ざらざら)

ここで，「ざらざら」「すべすべ」などは，それぞれ集合の分割の粒度「細かい」「粗い」に対応させた言語的変数(Zadeh)である．このような粒度表現の応用を今後検討したいと考えている．

文献

[1] Birkhoff,G. (1940)：Lattice Theory, American Mathe- matical Society.
[2] Goguen,J.A. (1967): L-fuzzy sets. Journal of Mathe- matical Analysis and Applications 18(1) 145-174, 1967.
[3] 村井哲也，工藤康生，赤間世紀 (2015): 粒度値ファジィ集合に関する一考察．第 31 回ファジィシステムシンポジウム，調布．(CD-ROM)
[4] Pawlak,Z. (1991): Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer, 1991.
[5] 椎塚久雄(2004): 感性システムのフレームワーク． 知能と情報, 16(5), 386-391.
[6] 杉原丈夫(1972): 命題論理学の系統的分類．科学哲学，Vol.5, pp.95-109.
[7] Zadeh, L.A. (1965): Fuzzy Sets, Information and Control, Vol.8, pp.338-353.