

令和 5 年度実績報告書

令和 5 年 3 月 2 1 日

公立千歳科学技術大学
学長 宮永 喜一 様

公立千歳科学技術大学特別研究等助成要綱第 7 条に基づき、下記のとおり報告いたします。

報告者	所属	共通教育課	職名	教授 准教授 講師 助教 助手
	氏名	藤井 忍	ふりがな	ふじい しのぶ
研究課題名	球面内の非 OT-FKM 型等質 4 次等径超曲面と運動量写像の幾何に関する研究			
本研究費による 発表論文、著書など	S. Fujii, Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres---Grassmannian cases, Differential Geom. Appl., Vol. 91 (2023), Paper No. 102072. *採択時に投稿済みであったが、査読者からの指摘の修正に本研究費で購入した書籍を用いた。			

【研究の背景】

球面内の等径超曲面とは、球面上定義された等径関数のレベルセットのことであり、幾何光学とも関わりのある実数体上の代数多様体である。その定義方程式系は球面の方程式およびカルタン・ミュンツナー多項式（以下、CM 多項式と呼ぶ）と呼ばれる g 次の斉次多項式から決まる方程式である。ただし、 g は超曲面の主曲率の個数で、その値は 1、2、3、4、6 の 5 種類しかないことが知られている。申請者の興味は $g = 4$ の場合である。 $g = 4$ 以外の場合の分類はずいぶん前に完成していたが、 $g = 4$ の場合の分類が完成したのは 2019 年のことである。ただし、その分類手法は複雑で、等質なものは表現論を用いて分類され、全部で 6 系統あることが分かっている。一方、OT-FKM 型と呼ばれる、非等質なものを含む大きなクラスがある。これらの超曲面はクリフォード代数の表現を用いて構成され、その分類には古典的な代数幾何がいわれている。OT-FKM 型が非等質なものしか無ければ分類は簡単であるが、等質な OT-FKM 型のものも複数存在し、このことが統一的な分類を複雑にしていた要因である。

申請者は、球面内の 4 次等径超曲面の統一的かつ幾何学的手法による分類を目標としており、運動量写像に注目して研究を進めている。具体的には 4 次の CM 多項式を或る運動量写像の重み付きノルム 2 乗として実現することを目指している。現時点では、等質 6 系統のうちの 5 系統（階数 2 のエルミート対称空間および階数 2 のグラスマン多様体）についてはその実現は完成している。この中には OT-FKM 型のものもあるが、残っている等質 1 系統 $SO(5) \times SO(5) / SO(5)$ の等方表現から得られる等径超曲面は OT-FKM 型ではない。

本研究課題では、 $SO(5) \times SO(5) / SO(5)$ の等方表現から得られる等質等径超曲面を或る運動量写像の重み付きノルム 2 乗として実現することを考える。

【研究の成果】

$SO(5) \times SO(5) / SO(5)$ の等方表現はリー群 $K = SO(5)$ のリー代数 $\mathfrak{so}(5)$ への随伴表現に等しいが、ハミルトン作用ではない。 $\mathfrak{so}(5)$ は実 10 次元であり、トレースフリーな 3 次実対称行列全体のなす線型空間 $V = \text{Sym}_3^0(\mathbb{R})$ が実 5 次元であることから、 $\mathfrak{so}(5)$ を $W = V \oplus V$ と同一視してシンプレクティック構造を与え、上記の等質等径超曲面を W 上のハミルトン作用から構成することを試みた。これまでの研究から $SO(2) \times SO(3)$ の作用がその条件を満たすものと期待している。実際、 W 上のシンプレクティック形式 ω を

$$\omega((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = \text{Tr}(X_1 Y_2) - \text{Tr}(Y_1 X_2)$$

で定義し、

$$SO(2) \times W \rightarrow W; \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot (X, Y) = (aX - bY, bX + aY),$$

$$SO(3) \times W \rightarrow W; \quad A \cdot (X, Y) = (AXA^{-1}, AYA^{-1})$$

と定義すると、2 つの作用は可換で、ともにハミルトン作用であることが分かった。この作用の直積として W 上の $SO(2) \times SO(3)$ -作用を定義する。の直積作用の運動量写像の重み付きノルム 2 乗が CM 多項式の条件を満たすかどうかについては、計算が完全には終わっていない。しかしながら、計算機を用いた計算では条件を満たすことがほぼ分かっている。愚直な計算以外で証明できるかについては現時点では不明である。

【今後の展望】

上記で得られた結果を論文にまとめて投稿するところまでが本研究課題の達成目標であったが、計算が想像していた以上に進まなかったため、来年度に論文にまとめて投稿する予定である。

今回の研究結果によって、球面内の 4 次等質等径超曲面はすべてハミルトン作用の重み付きノルム 2 乗で実現できることが分かった。しかし、非等質なものについては未解決である。来年度以降は非等質または一般の OT-FKM 型の 4 次等径超曲面の CM 多項式をハミルトン作用の重み付きノルム 2 乗として実現する方法を研究する。

4 次等質等径超曲面の CM 多項式はすべて不変式であったが、4 次の不変式ということ以外は不変式としての性質も不明である。特別な性質をもった不変式であることが期待されており、その不変式論的特徴も明らかにしたい。