令和6年度実績報告書

令和7年3月21日

公立千歳科学技術大学
学長　宮永　喜一　様

公立千歳科学技術大学特別研究等助成要綱第7条に基づき、下記のとおり報告いたします。

報告者	所属	共通教育科	職名	教授　准教授　講師　助教　助手
	氏名	藤井　忍	ふりがな	ふじい　しのぶ
研究課題名	球面内の4次等径超曲面の不変式論的特徴づけに関する研究			
本研究費による発表論文、著書　など	藤井 忍, 対称Clifford系と実Grassmann多様体の部分カンドルについて, 部分多様体幾何とリー群作用2024 記録集, to appear			

研究成果報告

当初の研究計画では，４次カルタン・ミュンツナー多項式のカシミール作用素を用いた記述を目標としていたが、共同研究者との議論の中で，次年度以降に予定していた「クリフォード代数の表現とグラスマン多様体のカンドル構造」に関する研究に大きな進展が見られたため，研究課題を変更して研究を進めた。

【研究の背景】

クリフォード代数の実n次表現は $2n$ 次の実対称行列の有限集合 $\{P_0, P_1, \dots\dots, P_m\}$ であって、以下の関係式を満たすもの（これを対称クリフォード系と呼ぶ）から決定されることが知られている：

$$P_i\ P_j + P_j\ P_i = 2\ \delta_{ij}\ I_{2n}.$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタで，I_{2n} は $2n$ 次の単位行列である。対称クリフォード系の各元 P_i に対して，$V_i = \{v\ \in R^{2n}\ | P_i\ v = v\}$ と定めると，各 V_i は n 次元部分空間であることはすぐわかる。
さらに，R^{2n} にユークリッド内積を入れ，V_i に関する鏡映変換を $\sigma_i : R^{2n} \to R^{2n}$ とすると，$i \neq j$ ならば $\sigma_i(V_j) = V_j^{\perp}$ を満たすことが分かる。ただし，$V_j^{\perp}$ は V_j の直交補空間である。　そこで，一般に $i \neq j$ ならば $\sigma_i(V_j) = V_j^{\perp}$ を満たすR^{2n} 内の n 次元部分空間の有限集合 $\{V_0, V_1, \dots\dots, V_m\}$ をクリフォード配置と名付け，その部分空間配置としての性質を明らかにすることがこの研究の大きな課題である。

リーマン多様体 M であって，各点 $x \in M$ に対して点対称 $s_x : M \to M$ が備わっているものをリーマン対称空間と呼ぶ。リーマン対称空間の「かたち」は対蹠集合を調べることで大まかに分かると考えられている。しかし、多くの対称空間について，その対蹠集合の記述や分類は不明であったが，近年，田中−−田崎の研究によって明らかになってきている。

R^{2n} 内の n 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_n^{2n}(R)$ はリーマン対称空間なのだが，これの対蹠集合や極大対蹠集合についてはまだ詳細はわかっていない。しかし，$V \in\ \mathrm{Gr}_n^{2n}(R)$ とその直交補空間を同一視した空間 $\mathrm{Gr}_n^{2n}(R)^*$ （これも対称空間になる）の極大対蹠集合の分類は田中−−田崎によって最近完成した。この空間の対蹠集合はクリフォード配置と関係あることは既に申請者が示していたが，分類結果を用いて詳細を明らかにすることが本研究の課題である。

【研究の成果】

今回の研究の大きな結果は，不完全ではあるが，田中−−田崎の結果をクリフォード配置の言葉で記述したことにある。

クリフォード配置自身は対蹠集合にはならないが，クリフォード配置とそれに属する部分空間の直交補空間すべてを含む有限集合は $\mathrm{Gr}_n^{2n}(R)$ の点対称に対して

$$s_V \circ s_W = s_W \circ s_V \quad (V, W \in\ \mathrm{Gr}_n^{2n}(R))$$

を満たす（このような集合を s−可換集合と呼ぶ）ことは申請者によって明らかになっていた。また，クリフォード配置に属する部分空間とその直交補空間を同一視する同値関係による商は $\mathrm{Gr}_n^{2n}(R)^*$ の極大対蹠集合と関係あることが期待されていたが，田中−−田崎の結果を合わせることでクリフォード配置との関係が明らかになった。低次元の場合は具体的かつ簡単に記述できることも大きな結果である。
また，有向グラスマン多様体（部分空間に右手系，左手系の基底を選んで向きを考える）の極大 s−可換集合とクリフォード配置の関係も部分的に明らかにできた。

【今後の展望】

当初の研究計画を実行しなかったことは申し訳なく思うが，次年度以降に進める予定であった研究に大きな進展があったことは喜ばしいことである。今回得られた結果を論文にまとめて投稿する予定ではあるが，具体的なことはまだ決まっていない。

クリフォード配置から４次カルタン・ミュンツナー多項式を構成できると予想しているが，この問題は次年度以降の課題である。もしクリフォード配置から４次カルタン・ミュンツナー多項式を構成できれば，$\mathrm{Gr}_n^{2n}(R)^*$ の幾何と４次等径超曲面の幾何に関係があることが分かり，とても興味深い課題である。