

令和 6 年度実績報告書

令和 7 年 3 月 21 日

公立千歳科学技術大学
学長 宮永 喜一 様

公立千歳科学技術大学特別研究等助成要綱第 7 条に基づき、下記のとおり報告いたします。

報告者	所属	共通教育科	職名	助教
	氏名	本多俊一	ふりがな	ほんだしゅんいち
研究課題名	特異点を持つ余次元が高い可微分写像の微分幾何学的研究			
本研究費による発表論文、著書 など	【論文】 [1] <u>Shun' ichi Honda</u>, Masatomo Takahashi, Circular evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean space, accepted December 2024. 【講演・口頭発表等】 [2] 本多俊一, Frenet 型枠付け可能曲線とその応用, 千歳幾何学研究集会, 2024 年 8 月. [3] 本多俊一, 空間曲線の表現公式, 室蘭特異点論研究集会, 2025 年 1 月. [4] 本多俊一, 空間曲線の表現公式とその応用, 幾何学と特異点 2025 年 3 月.			

【本研究の学術的背景】可微分多様体間の可微分写像 (C^∞ 級写像) の特異点とは、写像の微分の階数が最大でない点、すなわち陰関数定理が適用できない点を指します。一般に、可微分写像を扱う際、特異点は自然に現れ、その解析が重要な課題となります。可微分写像の特異点論は 20 世紀後半に体系化され、その後、微分幾何学への応用が多方面で進められてきました。

近年では、特異点を持つ曲線や曲面のクラスとして、フロント／フロンタルに関する微分幾何学的研究が盛んに行われています。フロント／フロンタルは、特異点を持ちながらも法線ベクトルが定義される余次元が 1 の可微分写像です。

このような流れの中で、申請者は特異点を持つ余次元が 2 以上の曲線のクラスとして「枠付き曲線」の概念を導入し、その基礎理論を構築しました ([Honda, Takahashi, 2016])。枠付き曲線は、特異点を持ちながらもフレーム（動標構）が定義されており、このフレームを利用して構造方程式 (Frenet-Serret の公式) や曲率といった不変量が導入されます。この理論により、特異点を持つ余次元が 2 以上の曲線の微分幾何学的性質が解明されました。特に、報告者による枠付き曲線の理論は、特異点を持つ余次元が 2 以上の可微分写像の微分幾何学的研究における先駆的な成果として位置付けられます。

【本研究の目的】本研究では、特異点を持つ余次元が 2 以上の可微分写像に焦点を当て、その微分幾何学的性質を解明することを目的としています。特に、余次元が 2 の場合（例： $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ）における理論を深化させ、これを基盤として、より一般的な次元対に対応する理論の構築を目指します。

【本研究で得られた成果】学内特別研究費の支援を受け、空間曲線 $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ における理論の深化を進めました。得られた成果は以下の通りです。

●論文

[1] Shun'ichi Honda, Masatomo Takahashi, Circular evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean space, accepted December 2024.

●講演・口頭発表等

- [2] 本多俊一, Frenet 型枠付け可能曲線とその応用, 千歳幾何学研究集会, 2024 年 8 月.
[3] 本多俊一, 空間曲線の表現公式, 室蘭特異点論研究集会, 2025 年 1 月.
[4] 本多俊一, 空間曲線の表現公式とその応用, 幾何学と特異点 2025 年 3 月.

【[1] の概要】平面曲線の縮閉線はその曲線の曲率円（接触円）の中心の軌跡として得られる曲線であり、伸開線はその曲線を巻きつけられた糸をたゆまないようにほぐしてゆくときの端点の軌跡として得られる曲線です。縮閉線と伸開線をとる操作はある種の逆操作であることが知られています。縮閉線と伸開線は波の生成、光の波動性や振りの等時性などの研究に利用されてきた曲線であり、自然に特異点を持つ曲線です。

本論文では、空間曲線の平行曲線、法線曲面、縮閉線と伸開線について調査した結果を報告しました。空間曲線の縮閉線は「接触円に由来する縮閉線」を考えます。特異点を許容する空間曲線の微分幾何学的研究手法として、上述の報告者による枠付き曲線の理論を適用しました。ビショップフレーム（特別なフレーム）を利用し、縮閉線と伸開線の定式化・調査を行いました。その結果、然るべき仮定の下、「接触円に由来する縮閉線」をとる操作と伸開線をとる操作がある種の逆操作であり、特異点型の対応が得られることが明らかになりました。具体的には $2/3$ カスプ、 $4/3$ カスプ、カスプ辺、ツバメの尾、カスプ状交叉帽子が観察できます。

【[2, 3] の概要】[Eisenhart, 1909] において、Frenet-Serret の公式から Riccati 型の微分方程式を介して正則曲線の積分を用いた表現公式が紹介されています。「特異点を許容する表現公式」と「非 Frenet フレームに関する表現公式」などを構成し、一般化を行いました。